Neue Verfahren zur direkten Lösung algebraischer Eigenwertprobleme

Falk, Sigurd

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 6, 1954, S. 166-194

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Neue Verfahren zur direkten Lösung algebraischer Eigenwertprobleme

Von **Sigurd Falk**

Mit 2 Abbildungen

Vorgelegt von Herrn **H. Schaefer**

Summary: The general algebraic Eigenvalue-Problem is solved by transformation of two given matrices into two other matrices, of which the characteristic equation can be found easily. One of the three methods given in this paper is suitable also for more general problems. No special suppositions are made; both matrices of the given pair may be singular.

Übersicht: Das allgemeine Eigenwertproblem wird gelöst, indem das Paar gegebener Matrizen in ein anderes transformiert wird, dessen charakteristische Gleichung sich leicht aufstellen läßt. Eines der drei hier angegebenen Verfahren läßt sich auch auf noch allgemeinere Probleme ausdehnen. Es werden keinerlei Voraussetzungen gemacht; beide Matrizen des Paares dürfen singulär sein.

1. Einleitung

Zahlreiche Probleme der Technik und Physik führen entweder unmittelbar über Systeme von linearen homogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (Schwingungen mit endlich vielen Freiheitsgraden) oder über das Differenzenverfahren und die Methode von Ritz auf rein algebraische Eigenwertaufgaben der Form

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{x} = k\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{x} \quad \text{oder} \quad (\mathfrak{A} - k\,\mathfrak{B})\,\mathfrak{x} = 0 \tag{1}$$

Hierin sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei gegebene quadratische Matrizen n-ter Ordnung mit konstanten reellen oder komplexen Elementen, und gesucht werden nicht identisch verschwindende Vektoren $\mathfrak{x}_i$, sogenannte „Eigenvektoren", die für gewisse skalare Zahlen k_i, die „Eigenwerte" oder „charakteristischen Zahlen" die Gleichungen (1) befriedigen.

Da das Gleichungssystem (1) homogen ist, muß seine Determinante $|\mathfrak{A} - k\,\mathfrak{B}|$ verschwinden, also

$$|\mathfrak{A} - k\,\mathfrak{B}| = \varphi(k) = 0 \tag{2}$$

sein. Die Wurzeln der algebraischen Gleichung (2), deren Grad höchstens gleich n ist, sind die gesuchten Eigenwerte; denn für jede dieser Wurzeln ist das Gleichungssystem (1) lösbar, da sie dessen Determinante zu Null macht. Zu einem Eigenwert der Vielfachheit p gibt es stets mindestens einen und höchstens p verschiedene voneinander linear unabhängige Eigenvektoren. Insbesondere kann $\varphi(k) = \text{const.} \neq 0$ sein; dann gibt es weder Eigenwerte noch Eigenvektoren. Ist aber $\varphi(k) \equiv 0$, so ist jede beliebige Zahl Eigenwert, und es gibt mindestens einen Eigenvektor $\mathfrak{x}$ so, daß $\mathfrak{A}\,\mathfrak{x} = 0$ und gleichzeitig $\mathfrak{B}\,\mathfrak{x} = 0$ ist. Es sind nun zwei Arten von Verfahren zur Lösung der Gleichung (1) zu unterscheiden:

Erste Art: Direkte Verfahren: Man stellt die Gleichung (2) auf, ermittelt ihre Wurzeln und löst für jede verschiedene dieser Wurzeln das Gleichungssystem (1) auf.

Zweite Art: Indirekte Verfahren: Ohne Kenntnis des Polynoms $\varphi(k)$ werden Eigenwerte und -vektoren, oft auch die Eigenwerte allein mit (nicht immer) beliebig zu steigernder Genauigkeit ermittelt.

Die direkten Verfahren, mit denen wir uns im folgenden ausschließlich befassen, zerfallen wieder in zwei Gruppen:

Erste Gruppe: $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ werden nicht in andere Matrizen transformiert. Verfahren dieser Gruppe haben den Nachteil, daß, falls auch die Eigenvektoren verlangt werden, für jeden Eigenwert das Gleichungssystem (1) neu aufgelöst werden muß.

Zweite Gruppe: $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ werden in andere, für die weitere Rechnung bequemer zu handhabende Matrizenformen transformiert; hierzu stehen drei Wege offen:

I. Die Linearkombination von Zeilen des Gleichungssystems (1), gleichbedeutend mit der Multiplikation einer nichtsingulären Matrix $\mathfrak{L}$ von links:

$$\mathfrak{L}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{x} = k\,\mathfrak{L}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{x} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{L}\,(\mathfrak{A} - k\,\mathfrak{B})\,\mathfrak{x} = 0 \tag{3}$$

II. Die Linearkombination von Spalten des Gleichungssystems (1), gleichbedeutend mit der Einführung neuer Vektoren $\mathfrak{y}$:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{R}\,\mathfrak{y}\ ;\ |\mathfrak{R}| \neq 0 \tag{4}$$

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{y} = k\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{y} \quad \text{oder} \quad (\mathfrak{A} - k\,\mathfrak{B})\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{y} = 0 \tag{5}$$

III. Die Linearkombination von Zeilen und Spalten zugleich: man setzt $\mathfrak{R}\,\mathfrak{y} = \mathfrak{x}$ und multipliziert (1) mit $\mathfrak{L}$ von links:

$$\mathfrak{L}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{y} = k\,\mathfrak{L}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{y} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{L}\,(\mathfrak{A} - k\,\mathfrak{B})\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{y} = 0 \tag{6}$$

Oder mit

$$\mathfrak{L}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{R} = \mathfrak{A}^* \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{R} = \mathfrak{B}^* \tag{7}$$

$$\mathfrak{A}^*\mathfrak{y} = k\,\mathfrak{B}^*\mathfrak{y} \quad \text{oder} \quad (\mathfrak{A}^* - k\,\mathfrak{B}^*)\,\mathfrak{y} = 0 \tag{8}$$

Für $\mathfrak{L} = \mathfrak{E}$ geht III in II, für $\mathfrak{R} = \mathfrak{E}$ in I über, so daß wir künftig den Fall III als übergeordnet allein behandeln können. ($\mathfrak{E}$ ist die n-reihige Einheitsmatrix.)

Damit das Gleichungssystem (8) lösbar ist, muß ebenso wie unter (2)

$$|\mathfrak{A}^* - k\,\mathfrak{B}^*| = \varphi^*(k) = |\mathfrak{L}\,(\mathfrak{A} - k\,\mathfrak{B})\,\mathfrak{R}| = |\mathfrak{L}| \cdot |\,\mathfrak{A} - k\,\mathfrak{B}\,| \cdot |\mathfrak{R}| = 0 \tag{9}$$

sein. Daher wird das gesuchte Polynom $\varphi(k)$:

$$\varphi(k) \equiv |\mathfrak{A} - k\,\mathfrak{B}| = \frac{|\mathfrak{A}^*\,k - \mathfrak{B}^*|}{|\mathfrak{L}| \cdot |\mathfrak{R}|} = \frac{\varphi^*(k)}{|\mathfrak{L}| \cdot |\mathfrak{R}|} = 0 \tag{10}$$

wobei

$$|\mathfrak{L}| \neq 0 \quad \text{und} \quad |\mathfrak{R}| \neq 0. \tag{11}$$

Jetzt unterscheiden wir wieder zwei Fälle:

a) Die Elemente von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$ sind konstant; dann sind auch die Determinanten von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$ konstant und nach Voraussetzung (11) von Null verschieden, also liefert nach (10) die Gleichung $\varphi^*(k) = 0$ dieselben Eigenwerte wie (2)!

b) Die Elemente von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$ sind Funktionen des Parameters k. Dann sind die Determinanten $|\mathfrak{L}|$ und $|\mathfrak{R}|$ entweder konstant und von Null verschieden, und $\varphi^*(k) = 0$ liefert ebenfalls dieselben Eigenwerte wie (2), oder die Determinanten $|\mathfrak{L}|$ und $|\mathfrak{R}|$ sind ihrerseits Funktionen von k, dann ist nach (10) das Polynom $\varphi^*(k)$ zuvor durch $|\mathfrak{L}|\ (k)$ und $|\mathfrak{R}|\ (k)$ zu dividieren.

Bedient man sich ausschließlich sogenannter „elementarer Umformungen", an den Zeilen und Spalten der Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so sind die Determinanten $|\mathfrak{L}|$ und $|\mathfrak{R}|$ stets konstant und von Null verschieden, einerlei, ob nun die Elemente von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$ selbst konstant sind oder nicht. Zu den elementaren Umformungen gehören:

1. Multiplikation einer Spalte (Zeile) mit einer von Null verschiedenen Konstanten.
2. Addition einer Linearkombination von beliebig vielen anderen Spalten (Zeilen) zu irgendeiner Spalte (Zeile).
3. Vertauschen zweier oder mehrerer Spalten (Zeilen).
4. Ersetzen einer i-ten Spalte (Zeile) durch eine beliebige Linearkombination $\mathfrak{z}$ von anderen Spalten (Zeilen) $\mathfrak{s}_\varrho$, unter denen die i-te Spalte (Zeile) selbst vorkommt:

$$\mathfrak{z} = c_1 \mathfrak{s}_1 + c_2 \mathfrak{s}_2 + \ldots\ldots + c_i \mathfrak{s}_i \ldots\ldots + c_n \mathfrak{s}_n ; c_i \neq 0 \tag{12}$$

Die Umformungen 3. und 4. sind übrigens lediglich Folgen von 1. und 2.

Ist $\mathfrak{B}$ insbesondere gleich der n-reihigen Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$, so spricht man von der „speziellen" Eigenwertaufgabe

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} = k\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{x} = k\,\mathfrak{x} \quad \text{oder} \quad (\mathfrak{A} - k\,\mathfrak{E})\,\mathfrak{x} = 0 \tag{13}$$

Eine Übersicht stellt noch einmal alle Verfahren zusammen:

<table>
<tr><th>Indirekte Verfahren</th><th colspan="3">Direkte Verfahren</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Gewöhnliche Iteration; Gebrochene Iteration nach Wielandt; Verfahren von Jakobi; Einschließungssätze; u. a.</td><td>$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ werden nicht transformiert</td><td colspan="2">$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ werden transformiert in $\mathfrak{L}\mathfrak{A}\mathfrak{R} = \mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{L}\mathfrak{B}\mathfrak{R} = \mathfrak{B}^*$ wo $|\mathfrak{L}| \neq 0$ und $|\mathfrak{R}| \neq 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Einsetzen von $n+1$ Zahlenwerten, dann Interpolation; Spurpotenzenverfahren nach den Newtonschen Formeln für $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$; Heranziehen der Cayley-Hamiltonschen Gleichung; u. a.</td><td colspan="2">Die Elemente von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$ sind</td></tr>
<tr><td>konstant</td><td>Funktionen von k</td></tr>
<tr><td>Abschnitt 3</td><td>Abschnitt 4</td></tr>
</table>

Sämtliche bis zum Jahre 1951 bekanntgewordenen direkten und indirekten Verfahren zur Lösung des speziellen Problems ($\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$) sind von E. Bodewig [1] in einer umfangreichen Abhandlung zusammengefaßt und kritisch besprochen worden.

2. Allgemeine Rechenverfahren der Matrizenalgebra

2.1 Die Matrizenmultiplikation

Zwei Matrizen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ lassen sich in dieser Reihenfolge multiplizieren, wenn $\mathfrak{P}$ ebensoviel Spalten wie $\mathfrak{Q}$ Zeilen hat. Die Multiplikation geschieht in folgender Anordnung:

$$\begin{array}{cc} & (\mathfrak{Q}) \\ (\mathfrak{P}) & (\mathfrak{P}\mathfrak{Q}) \end{array}$$

Irgendein Element x der gesuchten Produktmatrix $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \mathfrak{X}$ ist gleich dem inneren (skalaren) Vektorprodukt aus der links neben x stehenden Zeile von $\mathfrak{P}$ und der über x stehenden Spalte von $\mathfrak{Q}$. Mehrfache Produkte bildet man ebenso. Liegende (stehende) Vektoren ordnen sich als einzeilige (einspaltige) Matrizen in dieses Schema ein. Zum Beispiel wird mit

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \; \mathfrak{f}' = (1\;0\;-1); \; \mathfrak{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

das Matrizenprodukt $\mathfrak{X} = \mathfrak{f}'\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{g}$:

$$\begin{array}{ccccc}
 & \mathfrak{A}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\mathfrak{B} & \overset{\mathfrak{C}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\mathfrak{g} \\
\mathfrak{f}'\,(1\quad 0\quad -1) & (-1\quad 1\quad 1) & (-1\quad -2) & (-3\quad 1) & (-3)
\end{array}$$

oder auch

$$\begin{array}{cccc}
 & & \mathfrak{C}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \\
 & \mathfrak{B}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\mathfrak{g} \\
 & \mathfrak{A}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \\
 & & \mathfrak{f}'\,(1\quad 0\quad -1) & (-3)
\end{array}$$

Man kann also die Produktbildung irgendwo an den Enden oder auch in der Mitte beginnen und kommt stets zwangläufig zur richtigen Endmatrix $\mathfrak{X}$, die hier quadratisch von der Ordnung $n = 1$, also eine skalare Zahl $x = -3$ ist. Jede Matrix in einer solchen traubenförmigen Anordnung, die über sich und links neben sich je eine Matrix stehen hat, ist stets das Produkt aus diesen beiden, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes vereinbart ist!

2.2 Besondere Formen von Matrizen

Eine Sonderform der allgemeinen rechteckigen Matrizen stellen die quadratischen Matrizen n-ter Ordnung mit n Zeilen und n Spalten dar. Von den quadratischen Matrizen sind wiederum folgende spezielle Formen bemerkenswert:

$$\underset{\text{Einheitsmatrix } \mathfrak{E}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}}; \quad \underset{\text{Diagonalmatrix } \mathfrak{D}}{\begin{bmatrix} * & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & * & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & * & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & * \end{bmatrix}}; \quad \underset{\text{Dreiermatrix } \mathfrak{G}}{\begin{bmatrix} * & * & 0 & \ldots & 0 \\ * & * & * & \ldots & 0 \\ 0 & * & * & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & * \end{bmatrix}}; \quad \underset{\text{Hessenbergmatrix } \mathfrak{H}}{\begin{bmatrix} * & * & * & \ldots & * \\ * & * & * & \ldots & * \\ 0 & * & * & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & * \end{bmatrix}};$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & * \\ 1 & 0 & 0 & \dots & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \end{bmatrix};\quad \begin{bmatrix} * & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \end{bmatrix};\quad \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & \dots & * \end{bmatrix};\quad \begin{bmatrix} * & * & * & \dots & * \\ * & * & * & \dots & * \\ * & * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & \dots & * \end{bmatrix}.$$

Begleitmatrix $\mathfrak{J}$ — Obere Dreiecksmatrix $\mathfrak{O}$ — Untere Dreiecksmatrix $\mathfrak{U}$ — Vollmatrix $\mathfrak{B}$

Dabei bedeuten die * Elemente, die im allgemeinen von Null verschieden sind.

2.3 Die Produktzerlegung einer Quadratischen Matrix

Eine quadratische Matrix $\mathfrak{B}$ n-ter Ordnung läßt sich durch geeignete elementare Umformungen an den Zeilen nach dem Gaußschen Eliminationsverfahren, also durch Multiplikation einer nichtsingulären Matrix $\mathfrak{L}_1$ von links stets auf eine obere (untere) Dreiecksmatrix $\mathfrak{L}_1\mathfrak{B}$ bringen. Dabei ist im allgemeinen $\mathfrak{L}_1$ und damit auch $\mathfrak{L}_1^{-1}$ eine untere (obere) Dreiecksmatrix, deren Hauptdiagonalelemente sämtlich gleich Eins sind. Wir haben damit die Produktzerlegung

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{L}_1^{-1}\,(\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{B}) \tag{14}$$

gewonnen, die wir praktisch so durchführen: Zunächst schreiben wir z. B. für $n = 4$) allgemein hin:

$$\begin{array}{rr} & \mathfrak{L}_1\mathfrak{B}\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix} \\ \mathfrak{L}_1^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\mathfrak{B} \end{array}$$

Die Matrix $\mathfrak{B}$ ist gegeben; die Punkte bezeichnen vorläufig noch unbekannte Elemente. Man kann die Einsen in $\mathfrak{L}_1^{-1}$ auch in die Hauptdiagonale von $\mathfrak{L}_1\mathfrak{B}$ nehmen und dafür die Hauptdiagonale von $\mathfrak{L}_1^{-1}$ durch Punkte ersetzen; beide Verfahren laufen im wesentlichen auf dasselbe hinaus. Wir bilden nun das Produkt von $\mathfrak{L}_1^{-1}$ mit der ersten Spalte von $\mathfrak{L}_1\mathfrak{B}$, das die — bereits bekannte! — erste Spalte von $\mathfrak{B}$ ergeben muß. Man erkennt ohne weiteres, daß das erste Element der ersten Spalte von $\mathfrak{L}_1\mathfrak{B}$ gleich dem Element b_{11} (oben links in $\mathfrak{B}$) und die erste Spalte von $\mathfrak{L}_1^{-1}$ gleich der durch b_{11} dividierten ersten Spalte von $\mathfrak{B}$ sein muß (im Beispiel ist $b_{11} = 1$). Also weiß man:

$$\begin{array}{rr} & \mathfrak{L}_1\mathfrak{B}\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix} \\ \mathfrak{L}_1^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \cdot & 1 & 0 \\ 1 & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\mathfrak{B} \end{array}$$

Nun wird das Produkt von $\mathfrak{L}_1^{-1}$ und der zweiten Spalte von $\mathfrak{L}_1\mathfrak{B}$ gebildet, das die zweite — bekannte! — Spalte von $\mathfrak{B}$ ergeben muß. Aus diesen n (hier 4) skalaren Vektorprodukten lassen sich aber eindeutig die n unbekannten Elemente in den zweiten Spalten von $\mathfrak{L}_1^{-1}$ und $\mathfrak{L}_1\mathfrak{B}$ entnehmen, so daß jetzt wird:

$$\mathfrak{L}_1\mathfrak{B}\begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . \\ 0 & -1 & . & . \\ 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{L}_1^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & . & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\mathfrak{B}$$

Beim nächsten Schritt füllt man auf die gleiche Weise die dritten Spalten aus, und so fort, bis $\mathfrak{L}_1^{-1}$ und $\mathfrak{L}_1\mathfrak{B}$ bekannt sind:

$$\mathfrak{L}_1\mathfrak{B}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{L}_1^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Ausnahme: Es kann vorkommen, daß man in $\mathfrak{L}_1^{-1}$ zwei Spalten vertauschen muß, damit die Zerlegung gelingt, doch entstehen dabei weiter keine Schwierigkeiten.

Hatte nun die Matrix $\mathfrak{B}$ den Rang r, so sind genau r Hauptdiagonalelemente in $\mathfrak{L}_1\mathfrak{B}$ von Null verschieden. Durch Multiplikation von links mit einer zweiten Matrix $\mathfrak{L}_2$, die jetzt eine obere Dreiecksmatrix sein muß, läßt sich $\mathfrak{L}_1\mathfrak{B}$ weiter vereinfachen in

$$\mathfrak{L}_2(\mathfrak{L}_1\mathfrak{B}) = \widehat{\mathfrak{E}} \;\; ; \;\; \mathfrak{B} = \mathfrak{L}_1^{-1}\mathfrak{L}_2^{-1}\widehat{\mathfrak{E}} \;\; ; \;\; |\mathfrak{L}_1| \neq 0 \;\; ; \;\; |\mathfrak{L}_2| \neq 0 \tag{15}$$

Ist $r = n$, so kann man für $\widehat{\mathfrak{E}}$ die n-reihige Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ wählen, und es ist einfach

$$\mathfrak{L}_2 = (\mathfrak{L}_1\mathfrak{B})^{-1} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{L}_2^{-1} = \mathfrak{L}_1\mathfrak{B} \tag{16}$$

Für $r < n$ aber ist das natürlich nicht möglich. Nennen wir „Regelspalten" einer Dreiecksmatrix solche, deren Hauptdiagonalelemente von Null verschieden sind, die anderen dagegen „Fehlspalten", so läßt sich stets folgende Form von $\widehat{\mathfrak{E}}$ erreichen: Die Regelspalten von $\widehat{\mathfrak{E}} = \mathfrak{L}_2(\mathfrak{L}_1\mathfrak{B})$ stimmen mit den entsprechenden Spalten der Einheitsmatrix überein, in den Fehlspalten dagegen können oberhalb (unterhalb) der Hauptdiagonalelemente, die ja Null sind, auch noch von Null verschiedene Elemente auftreten.

Falls erforderlich, läßt sich aus dieser so gekennzeichneten Form $\widehat{\mathfrak{E}}$ durch Spaltenkombination und Zeilenvertauschung die „Rangeinheitsmatrix" $\mathfrak{E}_{r;n-r}$ herstellen: das ist die n-reihige Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$, die an Stelle der letzten $n - r$ Einsen Nullen besitzt, also zum Beispiel:

$$\mathfrak{E}_{2;\,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{E}_{1;\,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

2.4 Die Determinante einer quadratischen Matrix

Aus $\mathfrak{B} = \mathfrak{L}_1^{-1}(\mathfrak{L}_1\mathfrak{B})$ folgt $|\mathfrak{B}| = |\mathfrak{L}_1^{-1}| \cdot |\mathfrak{L}_1\mathfrak{B}| = 1^n \cdot |\mathfrak{L}_1\mathfrak{B}| = |\mathfrak{L}_1\mathfrak{B}|$. Die Determinante von $\mathfrak{L}_1\mathfrak{B}$ aber ist als Produkt der Hauptdiagonalelemente sofort abzulesen. Im Beispiel 2.3 ist $|\mathfrak{L}_1\mathfrak{B}| = 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 3 = -6$.

2.5 Auflösen von inhomogenen Gleichungssystemen; Kehrmatrix

Ist die Gleichung $\mathfrak{B}\mathfrak{x} = \mathfrak{f}$ zu lösen ($|\mathfrak{B}| \neq 0$), so zerlegt man nach 2.3:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{x} = \mathfrak{L}_1^{-1}(\mathfrak{L}_1\mathfrak{B})\mathfrak{x} = \mathfrak{f}\,; \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{f} \tag{17}$$

und kann nun den gesuchten Vektor $\mathfrak{x}$ in zwei Schritten bestimmen. Es sei zum Beispiel $\mathfrak{f}' = (1\ \ -1\ \ 4\ \ 1)$ und $\mathfrak{B}$ die Matrix aus 2.3, dann wird:

$$\begin{array}{lcl} & & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathfrak{x} \uparrow \\ \mathfrak{L}_1\mathfrak{B} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \mathfrak{L}_1\mathfrak{B}\mathfrak{x} = \mathfrak{L}_1\mathfrak{f} \ \downarrow \\ \mathfrak{L}_1^{-1} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \mathfrak{f} \end{array}$$

Zuerst ermitteln wir den Zwischenvektor $\mathfrak{L}_1\mathfrak{B}\mathfrak{x}$ komponentenweise von oben nach unten, dann den gesuchten Vektor $\mathfrak{x}$ von unten nach oben, was die Pfeile andeuten. Wir sagen kurz, der gegebene Vektor $\mathfrak{f}$ wird an $\mathfrak{L}_1^{-1}$ und $\mathfrak{L}_1\mathfrak{B}$ „vorbeigezogen". Dieses Vorbeiziehen stellt gewissermaßen die Umkehrung der Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor dar, läßt sich aber nur an Dreiecksmatrizen durchführen, weshalb eine vorgelegte Vollmatrix zunächst zerlegt werden muß.

Lautet nun die Aufgabe allgemeiner

$$\mathfrak{B}\mathfrak{X} = \mathfrak{F}\,; \quad \mathfrak{X} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{F}; \quad |\mathfrak{B}| \neq 0 \tag{18}$$

wo $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{F}$ rechteckige Matrizen mit n-Zeilen und m-Spalten sind, so zieht man jeden der m-Spaltenvektoren von $\mathfrak{F}$ für sich an $\mathfrak{L}_1^{-1}$ und $\mathfrak{L}_1\mathfrak{B}$ vorbei und findet oben rechts im Schema die gesuchte Matrix $\mathfrak{X} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{F}$ vor. Wählt man insbesondere für $\mathfrak{F}$ die n-reihige Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$, so erscheint oben die Kehrmatrix $\mathfrak{B}^{-1}$. Auch wenn in $\mathfrak{L}_1^{-1}$ einige Spalten vertauscht werden mußten (siehe 2.3), ist der Vorgang derselbe, nur werden die Komponenten des Zwischenvektors $\mathfrak{L}_1\mathfrak{B}\mathfrak{x}$ in etwas anderer Reihenfolge ermittelt.

Ist nun aber der Rang r von $\mathfrak{B}$ kleiner als n und hat man $\mathfrak{B}$ auf die Form $\widehat{\mathfrak{E}}$ gebracht, so ergibt sich nach (15) die Matrix

$$\mathfrak{L}_2\mathfrak{L}_1\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\,; \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{L}_1^{-1}\mathfrak{L}_2^{-1}\mathfrak{X} \tag{19}$$

aus dem Schema

$$\begin{array}{ll} & [\quad \mathfrak{X}]\uparrow \\ [\mathfrak{L}_2^{-1}] & [\mathfrak{L}_2^{-1}\mathfrak{X}]\downarrow \\ [\mathfrak{L}_1^{-1}] & [\quad \mathfrak{F}\quad] \end{array}$$

Also auch jetzt läßt sich die gegebene Matrix $\mathfrak{F}$ oder der Vektor $\mathfrak{f}$ zuerst an $\mathfrak{L}_1^{-1}$ und dann an $\mathfrak{L}_2^{-1}$ vorbeiziehen, obwohl $\mathfrak{B}$ singulär ist.

2.6 Rechenaufwand

Der Arbeitsaufwand zerfällt stets in drei Gruppen: Multiplikationen (Divisionen), Additionen (Subtraktionen) und Aufschreibungen skalarer Zahlen. Wesentlich für die Beurteilung eines Verfahrens ist im allgemeinen die Anzahl der Multiplikationen (bzw. Divisionen, was im folgenden nicht immer ausdrücklich hinzugefügt wird), wobei Multiplikationen mit einer der Zahlen 0, 1 und -1 nicht gewertet werden. Die Abb. 1 zeigt einige typische, immer wiederkehrende Produktbildungen von Matrizen: die dunklen Flächen bedeuten von Null verschiedene Elemente, die freien Flächen Nullen. In der Tabelle I wird die benötigte Anzahl von Multiplikationen zusammengestellt. Dabei sind $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{O}$ Abkürzungen für Vollmatrix, untere und obere Dreiecksmatrix.

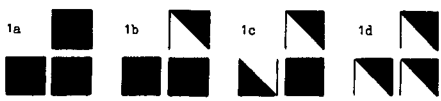

Abb. 1

Tabelle I:

Rechenoperation	Anzahl der erforderlichen Multiplikationen	
	genau	rund (für große n)
Abb. 1a $\mathfrak{B}\,\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$	n^3	n^3
Abb. 1b $\mathfrak{B}\,\mathfrak{O} \to \mathfrak{B}$ ebenso: $\mathfrak{B}\,\mathfrak{U} \to \mathfrak{B}$ $\mathfrak{O}\,\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ $\mathfrak{U}\,\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$	$\frac{n^2}{2}(n+1)$	$\frac{n^3}{2}$
Abb. 1c $\mathfrak{U}\,\mathfrak{O} \to \mathfrak{B}$ ebenso: $\mathfrak{O}\,\mathfrak{U} \to \mathfrak{B}$	$\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$	$\frac{n^3}{3}$
Abb. 1d $\mathfrak{O}\,\mathfrak{O} \to \mathfrak{O}$ ebenso: $\mathfrak{U}\,\mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$	$\frac{n}{6}(n+1)(n+2)$	$\frac{n^3}{6}$
Produktzerlegung einer Vollmatrix $\mathfrak{B}$	$\frac{n}{3}(n^2-1)$	$\frac{n^3}{3}$
Kehrmatrix $\mathfrak{B}^{-1}$; $\lvert\mathfrak{B}\rvert \neq 0$	n^3	n^3
Multiplikation eines Vektors mit einer Vollmatrix oder Vorbeiziehen an $\mathfrak{L}_1^{-1}$ und $\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{B}$	n^2	n^2

Weitere Einzelheiten, insbesondere Rechenproben und Vereinfachungen bei symmetrischen Matrizen findet man in dem bekannten Lehrbuch von R. Zurmühl [6].

3. Die Elemente der Transformationsmatrizen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$ sind konstant

3.1 Das spezielle Problem $\mathfrak{A}\,\mathfrak{x} = k\,\mathfrak{x}$ $(\mathfrak{B} = \mathfrak{E})$

Hier gibt es im wesentlichen drei verschiedene Verfahren, die neuerdings von H. Unger [4] unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt zusammengefaßt worden sind: die gegebene Vollmatrix $\mathfrak{A}$ wird in eine der drei Formen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$ oder $\mathfrak{J}$ übergeführt (siehe 2.2):

a) Verfahren von Hessenberg: $\mathfrak{A}$ wird in $\mathfrak{H}$ transformiert. $\mathfrak{R}$ ist eine untere Dreiecksmatrix, $\mathfrak{L}$ wird gleich $\mathfrak{R}^{-1}$ gesetzt, so daß $\mathfrak{L}\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{-1}\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{R} = \mathfrak{E}$ bleibt.

b) $\mathfrak{A}$ wird in die Dreiermatrix $\mathfrak{G}$ transformiert, indem man an $\mathfrak{H}$ eine zweite Hessenbergsche Transformation mit einer oberen Dreiecksmatrix $\mathfrak{R}$ durchführt.

c) $\mathfrak{A}$ wird in die Begleitmatrix $\mathfrak{J}$ transformiert: entweder direkt nach dem Verfahren von Danilewski [1] oder aber, indem man auf $\mathfrak{H}$ eine zweite Hessenbergsche Transformation in leichter Variante mit oberer Dreiecksmatrix $\mathfrak{R}$ anwendet.

Obwohl in den Fällen a) und b) lediglich zu verlangen wäre, daß die Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ ebenfalls in die Form $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{G}$ übergeht, ist es das einfachste, $\mathfrak{L} = \mathfrak{R}^{-1}$ zu wählen, so daß also der spezielle Charakter des Problems gewahrt bleibt. Die Determinanten $|\mathfrak{H} - k\,\mathfrak{E}|$ bzw. $|\mathfrak{G} - k\,\mathfrak{E}|$ lassen sich dann rekursiv ermitteln, indem man der Reihe nach die Hauptabschnittsdeterminanten berechnet; im Fall c) kann man die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $\varphi(k)$ aus der letzten Spalte der Matrix $\mathfrak{J}$ unmittelbar ablesen.

Die Eigenvektoren $\mathfrak{y}_i$ lassen sich auf zwei Arten gewinnen:

1. entweder wird für jeden berechneten Eigenwert k_i das Gleichungssystem $(\mathfrak{H} - k_i\,\mathfrak{E})\,\mathfrak{y}_i = 0$ bzw. $(\mathfrak{G} - k_i\,\mathfrak{E})\,\mathfrak{y}_i = 0$ bzw. $(\mathfrak{J} - k_i\,\mathfrak{E})\,\mathfrak{y}_i = 0$ aufgelöst, was wegen der speziellen Formen von $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{J}$ keine Schwierigkeiten macht, oder
2. man zieht ohne Kenntnis des Polynoms $\varphi(k)$ den Nullvektor $\mathfrak{n}$ an den Matrizen $\mathfrak{H} - k\,\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{G} - k\,\mathfrak{E}$ vorbei, wobei die Komponenten des Eigenvektors zunächst Polynome in k sind und das Polynom $\varphi(k)$ mitgeliefert wird. Nachträglich werden dann die Eigenwerte k_i in diese Polynome mit Hilfe des Hornerschen Schemas eingesetzt. In der Ingenieurmechanik ist dieses Verfahren für spezielle Dreiermatrizen und fest angenommene Werte k als die Methode von Holzer-Tolle bekannt.

Der Rechenaufwand ist bei beiden Vorgehensweisen im wesentlichen der gleiche. Zum Schluß werden dann die Eigenvektoren $\mathfrak{y}_i$ nach (4) zurücktransformiert.

Ein gewisser Nachteil dieser drei Verfahren besteht darin, daß die Transformationen nicht orthogonal sind; war $\mathfrak{A}$ symmetrisch, wie es gerade bei den technischen Anwendungen oft vorkommt, so wird diese Symmetrie durch die Transformation zerstört. Ein neues Verfahren, das sich auch auf allgemeine Probleme ausdehnen läßt, hilft diesem Mangel ab [3].

Alle drei Verfahren erfordern zur Aufstellung von $\varphi(k)$ rund n^3 und zur Berechnung der Eigenvektoren nochmals rund n^3 Multiplikationen. Die Methode von Hessenberg läßt sich etwas verbessern, indem man auf die Einsen in der Nebendiagonale von $\mathfrak{H}$ verzichtet und dafür die Hauptdiagonalelemente in $\mathfrak{R}$ sämtlich gleich 1 wählt; doch ist der Vorteil geringfügig.

3.2 Das allgemeine Problem $\mathfrak{A}\,\mathfrak{x} = k\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{x}$

Falls $\mathfrak{B}$ nichtsingulär ist, wird nach Multiplikation mit $\mathfrak{B}^{-1}$ von links:

$$\underbrace{\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}}\,\mathfrak{x} = k\,\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{B}\,\mathfrak{x} \tag{20}$$

$$\mathfrak{C}\,\mathfrak{x} = k\,\mathfrak{x} \tag{21}$$

oder falls $\mathfrak{B}$ singulär, $\mathfrak{A}$ dagegen nicht:

$$\mathfrak{B}\,\mathfrak{x} = \frac{1}{k}\mathfrak{A}\,\mathfrak{x} \;;\; \underbrace{\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}}\,\mathfrak{x} = \frac{1}{k}\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}\,\mathfrak{x} \tag{22}$$

$$\mathfrak{C}^{-1} = \frac{1}{k}\mathfrak{x} \tag{23}$$

Man könnte statt dessen auch neue Vektoren $\mathfrak{y} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{x}$ bzw. $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{x}$ einführen, hätte dann aber noch die umständliche Rücktransformation vorzunehmen, so daß also die Multiplikation von links günstiger ist, wie man überhaupt im allgemeinen bestrebt sein wird, möglichst wenig mit den Spalten, dafür mehr an den Zeilen zu operieren.

Die Berechnung von $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}$ erfordert rund $4\,n^3/3$ Multiplikationen (siehe Tabelle I), hinzu kommt eines der Verfahren 3.1, insgesamt also kostet die Aufstellung des charakteristischen Polynomes $\varphi(k)$ rund $7\,n^3/3$ und die Berechnung der Eigenvektoren rund n^3 Multiplikationen. Abgesehen davon, daß, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beide singulär sind, das Verfahren nach (20) bzw. (22) gar nicht durchführbar ist, stellt es auch rechnerisch einen Umweg dar, weil man auch ohne Kenntnis von $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}$ schneller zum Ziele gelangt, wie wir noch zeigen werden.

Damit die Determinante $|\mathfrak{L}\mathfrak{A}\mathfrak{R} - k\,\mathfrak{L}\mathfrak{B}\mathfrak{R}| = |\mathfrak{A}^* - k\,\mathfrak{B}^*|$ rekursiv auflösbar wird, hat man offenbar lediglich zu verlangen, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nach der Transformation beide in die Hessenbergform übergehen. Es ist dies das Mindestmaß dessen, was für die Rekurrierbarkeit zu fordern ist, stellt aber keineswegs das Mindestmaß an Rechenaufwand dar, wovon man sich leicht überzeugt. Es ist vielmehr zweckmäßiger, allein $\mathfrak{A}$ auf die Hessenbergform, dagegen $\mathfrak{B}$ in eine obere Dreiecksmatrix zu transformieren, was wir jetzt durchführen wollen:

Verfahren I

Erster Schritt: Durch Addition von Zeilen wird die erste Spalte in $\mathfrak{B}$ bis auf das erste Element b_{11} zu Null gemacht. Dabei sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}^{(1)}$ und $\mathfrak{B}^{(1)}$ übergegangen. Es ist $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{e}_1$, wenn $\mathfrak{R} = (\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2 \ldots \mathfrak{r}_n)$.

Zweiter Schritt: Die zweiten Spalten von $\mathfrak{A}^{(1)}$ und $\mathfrak{B}^{(1)}$ werden ersetzt durch Linearkombinationen $\mathfrak{A}^{(1)}\mathfrak{r}_2$ bzw. $\mathfrak{B}^{(1)}\mathfrak{r}_2$ der zweiten bis n-ten Spalten, und zwar wird $\mathfrak{r}_2$ so bestimmt, daß alle Elemente von $\mathfrak{B}^{(1)}\mathfrak{r}_2$ außer dem ersten übereinstimmen mit den Elementen der ersten Spalte von $\mathfrak{A}^{(1)}$. Die erste Komponente des Vektors $\mathfrak{r}_2$ ist dann gleich Null, die anderen findet man durch

Auflösen eines inhomogenen Gleichungssystems, dessen Determinante die Hauptabschnittsdeterminante der Ordnung $n-1$ rechts unten in $\mathfrak{B}^{(1)}$ ist. Nun macht man in der zweiten Spalte von $\mathfrak{B}^{(1)}$ mittels Zeilenkombinationen von oben nach unten das zweite, in der Hauptdiagonale stehende Element zu eins und alle darunterstehenden zu Null. Die erste Spalte in $\mathfrak{A}^{(1)}$ nimmt dabei von selbst die gewünschte Form der ersten Spalte einer Hessenberg-matrix an. $\mathfrak{A}^{(1)}$ und $\mathfrak{B}^{(1)}$ sind jetzt in $\mathfrak{A}^{(2)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$ übergegangen.

$i+1$ter Schritt: die $i+1$ten Spalten von $\mathfrak{A}^{(i)}$ und $\mathfrak{B}^{(i)}$ werden ersetzt durch Linearkombinationen $\mathfrak{A}^{(i)}\mathfrak{r}_{i+1}$ bzw. $\mathfrak{B}^{(i)}\mathfrak{r}_{i+1}$ der $i+1$ten bis n-ten Spalten, und zwar so, daß die neue $i+1$te Spalte von $\mathfrak{B}^{(i)}$ bis auf die ersten i Elemente übereinstimmt mit der i-ten Spalte von $\mathfrak{A}^{(i)}$. Macht man jetzt durch Zeilenkombination das Hauptdiagonalelement der neuen $i+1$ten Spalte in $\mathfrak{B}^{(i)}$ zu eins und alle darunter liegenden zu Null, so geht die i-te Spalte von $\mathfrak{A}^{(i)}$ in die gewünschte Form über.

Sind $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ ermittelt, so verläuft die weitere Rechnung genau wie in 3.1 geschildert. Die Transformationsmatrix

$$\mathfrak{R} = (\mathfrak{e}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \ldots \mathfrak{r}_n) \tag{24}$$

ist eine untere Dreiecksmatrix ebenso wie bei der Methode von Hessenberg, in die das hier beschriebene Verfahren I für $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ ja auch vollständig übergeht.

Es kann vorkommen, daß beim i-ten Schritt in der Linearkombination $\mathfrak{B}^{(i-1)}\mathfrak{r}_i$ die i-te Spalte selbst mit dem Faktor Null erscheint, was nach (12) verboten ist (die Matrix $\mathfrak{R}$ würde sonst singulär!). Man muß dann in $\mathfrak{R}$ zwei geeignete Spalten vertauschen oder aber in der Nebendiagonale von $\mathfrak{A}^*$ eine 1 durch eine Null ersetzen (Näheres siehe Verfahren II).

Falls $\mathfrak{B}$ singulär vom Range $r < n$ ist, geschieht es genau $n-r$ mal, daß die Hauptabschnittsdeterminante rechts unten in $\mathfrak{B}$ verschwindet. Dann wählt man den Vektor $\mathfrak{r}_i$ so, daß in der neuen Spalte $\mathfrak{B}^{(i-1)}\mathfrak{r}_i$ das Hauptdiagonalelement und alle darunter stehenden Elemente von vornherein gleich Null sind, und kann in $\mathfrak{A}^{(i-1)}$ die $i-1$te Spalte auf die Hessenbergform bringen, ohne daß man auf $\mathfrak{B}^{(i-1)}$ Rücksicht zu nehmen brauchte. In der Endform $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{B}$ treten dann in der Hauptdiagonale $n-r$ Nullen an die Stelle von Einsen.

Ist das inhomogene Problem

$$(\mathfrak{A} - k\,\mathfrak{B})\,\mathfrak{x} = \mathfrak{f} \tag{25}$$

vorgelegt, so faßt man den Vektor $\mathfrak{f}$ als $n+1$te Spalte von $\mathfrak{A}$ auf; $\mathfrak{f}$ geht dann von selbst in $\mathfrak{L}\,\mathfrak{f}$ über.

Da bei dem Verfahren I $n-2$ verschiedene inhomogene Gleichungssysteme der Ordnungen $2, 3, \ldots n-1$ gelöst werden müssen, was jedesmal rund $i^3/3$ Multiplikationen erfordert (Tabelle I), wird es für große n allen anderen Verfahren, die nur mit der dritten Potenz von n gehen, unterlegen sein, denn es ist ja

$$\sum_{i=2}^{n-1} \frac{i^3}{3} \approx \int_2^{n-1} \frac{i^3}{3} \cdot d\,i \approx \frac{n^4}{12}$$

Für $n = 3, 4$ und 5 kann es jedoch durchaus mit den Verfahren II und III konkurrieren (siehe Tabelle II).

Beispiel 1: Eigenwerte und -vektoren der Aufgabe $(\mathfrak{A} - k\,\mathfrak{B})\,\mathfrak{x} = 0$ sind gesucht. Es sei

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Schritt: Die zweite Zeile wird von der dritten abgezogen, dann werden erste und zweite Zeile vertauscht:

$$\mathfrak{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{B}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathfrak{e}_1$$

2. Schritt: Die dreireihige Hauptabschnittsdeterminante rechts unten in $\mathfrak{B}^{(1)}$ verschwindet offenbar wegen der Gleichheit der beiden letzten Zeilen — also lassen sich drei Nullen kombinieren! Das geschieht hier, indem man die mit -2 multiplizierte vierte Spalte zur zweiten addiert:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Nun kann man die erste Spalte der linken Matrix auf die gewünschte Form bringen: die mit -2 multiplizierte vierte Zeile wird zur dritten addiert, dann die vierte Zeile mit -1 multipliziert und mit der zweiten vertauscht:

$$\mathfrak{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{B}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Schritt: Die beiden letzten Spalten von $\mathfrak{B}^{(2)}$ sind so zu kombinieren, daß die beiden letzten Elemente der neuen dritten Spalte in $\mathfrak{B}^{(2)}$ mit denen der zweiten Spalte in $\mathfrak{A}^{(2)}$ übereinstimmen. Hier braucht man nun lediglich die zweiten und dritten Spalten zu vertauschen und findet:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{r}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathfrak{r}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nun wird die dritte Zeile zur vierten addiert und die dritte mit -1 multipliziert:

$$\mathfrak{A}^{(3)} = \mathfrak{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{B}^{(3)} = \mathfrak{B}^* = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit ist die Transformation beendet. In der oberen Dreiecksmatrix $\mathfrak{B}^*$ steht an einer Stelle statt der 1 eine 0, da der Rang von $\mathfrak{B}$ drei ist. Die Hessenbergmatrix $\mathfrak{A}^*$ ist hier zufällig zerfallen, was die weitere Rechnung erleichtert. Die Determinante

$$|\mathfrak{A}^* - k\mathfrak{B}^*| = \begin{vmatrix} 1-k & -2+3k & 2-2k & 3-k \\ 1 & -3 & k & -3+2k \\ 0 & 1 & 1-k & 4-2k \\ 0 & 0 & 0 & -k \end{vmatrix} = \varphi^*(k)$$

wird nun ermittelt, indem wir von links oben beginnend (man könnte auch rechts unten anfangen) nacheinander die Hauptabschnittsdeterminanten H_1, H_2, H_3 und $H_4 = \varphi^*(k)$ durch spaltenweises Entwickeln von oben nach unten berechnen:

$$\begin{aligned} H_1 &= 1-k \\ H_2 &= -(-2+3k)\cdot(1) + (-3)\cdot H_1 = 2-3k-3+3k = -1 \\ H_3 &= (2-2k)\cdot(1)\cdot(1) - k\cdot(1)\cdot H_1 + (1-k)\cdot H_2 \\ &= 2-2k-k+k-1+k = (k-1)^2 \\ H_4 &= -k\cdot H_3 = \underline{\varphi^*(k) = -k(k-1)^2} \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind demnach $k_1 = 0$ und $k_2 = k_3 = 1$. Als zugehörige Eigenvektoren findet man aus $(\mathfrak{A}^* - k_i\,\mathfrak{B}^*)\,\mathfrak{y}_i = 0$ ohne weiteres $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_{2,3}$, die noch mit $\mathfrak{R} = (\mathfrak{e}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4)$ zurücktransformiert werden:

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{y}_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}; & \mathfrak{y}_{2,3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathfrak{R} & & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \mathfrak{x}_1; & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \mathfrak{x}_{2,3} \end{array}$$

Man prüft leicht nach, daß in der Tat $\mathfrak{A}\mathfrak{x}_1 = 0$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{x}_{2,3} = 1 \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{x}_{2,3}$ ist.

Verfahren II

Der Hauptmangel des Verfahrens I besteht darin, daß jedesmal von neuem ein inhomogenes Gleichungssystem $n-1$., ... 3., 2. Ordnung gelöst werden muß, dessen zugehörige Matrix noch nicht zerlegt ist. Dem helfen wir jetzt ab, indem wir vor der Rechnung $\mathfrak{B}$ durch Zeilenkombinationen zur unteren Dreiecksmatrix machen. Da im Verfahren I stets die Zeilen von oben nach unten hinzuaddiert werden, bleibt die Form $\mathfrak{U}$ (siehe 2.2) während der ganzen Transformation erhalten, und $\mathfrak{B}$ geht jetzt, falls nichtsingulär, über $\mathfrak{U}$ in die Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ über.

Ganz allgemein gilt nun für nichtsinguläres $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{L}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{R} = \mathfrak{A}^* \quad \text{oder} \quad \mathfrak{A}\,\mathfrak{R} = \mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{A}^* \tag{26}$$

und

$$\mathfrak{L}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{R} = \mathfrak{B}^* \quad \text{oder} \quad \mathfrak{B}\,\mathfrak{R} = \mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{B}^* \tag{27}$$

wobei über die Form der Matrizen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$ noch nichts vorausgesetzt sei. Nun folgt aus (27) und (26)

$$\mathfrak{L}^{-1} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{R}\,(\mathfrak{B}^*)^{-1}; \quad \mathfrak{A}\,\mathfrak{R} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{R}\,(\mathfrak{B}^*)^{-1}\mathfrak{A}^* \tag{28}$$

Wir haben $\mathfrak{L}$ und nicht $\mathfrak{R}$ eliminiert, da wir $\mathfrak{R}$ für die spätere Rücktransformation benötigen, $\mathfrak{L}$ dagegen ohne praktisches Interesse ist. Im Verfahren I war $\mathfrak{B}^*$ ebenso wie die Kehrmatrix $(\mathfrak{B}^*)^{-1}$ eine obere Dreiecksmatrix, jetzt aber soll $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{E}$ sein, also wird aus (28):

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{N} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{A}^* \tag{29}$$

Dies gilt für jede beliebige Matrizentransformation, bei der die nichtsinguläre Matrix $\mathfrak{B}$ in die Einheitsmatrix übergehen soll. Nun wissen wir aus dem Verfahren I, daß, wenn insbesondere $\mathfrak{A}^*$ die Hessenbergform annehmen soll, $\mathfrak{N}$ eine untere Dreiecksmatrix ist; außerdem sollte ja $\mathfrak{B}$ ebenfalls von vornherein eine untere Dreiecksmatrix sein. Die Gleichung (29) hat daher in der praktischen Rechnung das Aussehen der Abb. 2.

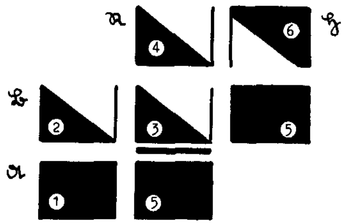

Abb. 2

Der waagerechte Trennstrich zwischen den Matrizen [3] und [5] deutet an, daß nicht wie sonst üblich [1] und [3] multipliziert [5] ergeben, sondern [1] und [4]. In der Tat ist dann

$[5] = [1] \cdot [4] = \mathfrak{A}\,\mathfrak{N}$ und andererseits
$[5] = [3] \cdot [6] = [2] \cdot [4] \cdot [6] = \mathfrak{B}\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{H}$
wie nach (29) verlangt.

Die Matrix [5], die man bei der praktischen Rechnung auf ein zweites Blatt schreibt, das man einmal rechts neben $\mathfrak{A}$ und ein andermal unter $\mathfrak{H}$ schiebt, ist an sich ebenso wie die Matrix [3] ohne Interesse, gesucht sind lediglich $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{H}$. Das Schema erlaubt nun, die Matrizen [3], [4], [5] und [6] in dieser Reihenfolge spaltenweise zu ermitteln, wenn nur die erste Spalte in [3], für die man am einfachsten den Einheitsvektor $\mathfrak{e}_1$ wählt, bekannt ist: Zunächst läßt sich nämlich die erste Spalte von [3] an der Matrix [2] vorbeiziehen, da diese die Form $\mathfrak{U}$ hat — das ergibt die erste Spalte von [4]. Nun gibt das Produkt aus [1] und der ersten Spalte von [4] die erste Spalte von [5]. Diese wiederum, unter $\mathfrak{H}$ ein zweitesmal hingeschrieben, gestattet, die erste Spalte von [6] und die zweite Spalte von [3] auszufüllen, da [3] und [6] die Formen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{H}$ haben. Die zweite Spalte von [3] liegt nun fest, und damit ergeben sich auf die gleiche Weise alle zweiten Spalten des Hauptschemas und so fort, bis $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{H}$ bekannt sind.

Obschon nicht unbedingt notwendig, ist es zweckmäßig, bei der Vorbereitung von $\mathfrak{B}$ auch noch die erste Spalte bis auf das erste Element zu Null zu machen, ferner alle Hauptdiagonalelemente zu eins.

Der Rechenaufwand beträgt nach Tabelle I:

Vorbereitung:	Aufspalten von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{L}_1^{-1}$ und $\mathfrak{L}_1\mathfrak{B}$	rund	$n^3/3$	Multipl.
	Vorbeiziehen der Matrix $\mathfrak{A}$ an $\mathfrak{L}_1^{-1}$	rund	$n^3/2$	Multipl.
Hauptschema:	Multiplikation von [2] und [4]	rund	$n^3/6$	Multipl.
	Multiplikation von [1] und [4]	rund	$n^3/2$	Multipl.
	Multiplikation von [3] und [6]	rund	$n^3/3$	Multipl.
Rekursion:		rund	$n^3/6$	Multipl.
	Summe	rund	$2\,n^3$	Multipl.
Berechnen der Vektoren $\mathfrak{y}_i$		rund	$n^3/2$	Multipl.
Rücktransformation $\mathfrak{x}_i = \mathfrak{N}\,\mathfrak{y}_i$		rund	$n^3/2$	Multipl.
	Summe	rund	n^3	Multipl.

Genaue Angaben findet man in der Tabelle II.

Beispiel 2: Eigenwerte und -vektoren der Aufgabe $(\mathfrak{A} - k\,\mathfrak{B})\,\mathfrak{x} = 0$ sind gesucht. Es ist

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 14 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und } \mathfrak{B} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zunächst wird $\mathfrak{B}$ zerlegt:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \mathfrak{L}_1\,\mathfrak{B} \\ \mathfrak{L}_1^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \mathfrak{B} \end{array}$$

und $\mathfrak{A}$ an $\mathfrak{L}_1^{-1}$ vorbeigezogen:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 & -1 \\ -3 & 7 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & -1 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathfrak{L}_1\,\mathfrak{A} \\ \mathfrak{L}_1^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 14 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathfrak{A} \end{array}$$

Auch hier kann man sich das zweimalige Schreiben von $\mathfrak{L}_1^{-1}$ ersparen, wenn man die Matrizen $\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}$ auf einem beweglichen Blatt anordnet, was sich im Druck natürlich nicht nachahmen läßt. Nun beseitigen wir in $\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{B}$ die Elemente der ersten Spalte bis auf das erste und erhalten die Matrizen $\tilde{\mathfrak{A}}$ und $\tilde{\mathfrak{B}}$, mit denen wir gleich in das Hauptschema eingehen:

Hauptschema:

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{N} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & . & 1 & 0 \\ 0 & . & . & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . \end{bmatrix} \mathfrak{H} \\ \tilde{\mathfrak{B}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & . & 1 & 0 \\ 0 & . & . & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathfrak{A}} \begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 4 & -3 \\ -3 & -5 & -2 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} & \end{array}$$

Die Matrizen $\tilde{\mathfrak{A}}$ und $\tilde{\mathfrak{B}}$ liegen fest, außerdem alle hingeschriebenen Nullen und Einsen. Die Punkte bedeuten vorläufig noch unbekannte Elemente.

Nun füllt man der Reihe nach, wie beschrieben, die ersten, zweiten usw. Spalten aus und erhält:

$$\mathfrak{N}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\mathfrak{H}$$

$$\tilde{\mathfrak{B}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathfrak{A}}\begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 4 & -3 \\ -3 & -5 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Man kann nun nach 3.1 entweder die Determinante $|\mathfrak{H} - k\,\mathfrak{E}|$ rekursiv auflösen wie im Beispiel 1, oder den Nullvektor $\mathfrak{n}$ an der Matrix $\mathfrak{H} - k\,\mathfrak{E}$ vorbeiziehen, was sich stets durchführen läßt, auch wenn $\mathfrak{H}$ zerfallen sollte. Hier wird nun, wenn man die letzte Komponente von $\mathfrak{y}\,(k)$ gleich eins wählt:

$$\begin{array}{ll} & \begin{bmatrix} -k^3/2 + k^2/2 - k + 1 \\ k^2/2 \qquad + 1 \\ k + 1 \\ 1 \end{bmatrix}\mathfrak{y}\,(k) \\ \mathfrak{H} - k\,\mathfrak{E} & \\ \begin{bmatrix} -2-k & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1-k & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1-k \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} k^4/2 + k^3/2 + k^2/2 + 3\,k = 0! \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\mathfrak{n} \end{array}$$

Die erste Komponente von $\mathfrak{n}$ stellt bis auf einen beliebigen konstanten Faktor das Polynom $\varphi\,(k)$ dar. Aus $k^4 + k^3 + k^2 + 6\,k = 0$ gewinnt man die vier Eigenwerte 0, -2, $(1 + i\,\sqrt{11})/2$ und $(1 - i\,\sqrt{11})/2$. Jeden dieser Werte setzt man in $\mathfrak{y}\,(k)$ ein und erhält den zugehörigen Eigenvektor, z. B. für $k = -2$ den Vektor $\mathfrak{y}_2$, der gleich zurücktransformiert wird:

$$\mathfrak{y}_2\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Tatsächlich ist} \quad \mathfrak{A}\,\mathfrak{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -10 \\ -2 \\ -40 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{B}\,\mathfrak{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{N}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}\mathfrak{x}_2$$

also $\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}_2 = -2 \cdot \mathfrak{B}\,\mathfrak{x}_2$, wie es sein muß! Die Rücktransformation der Eigenvektoren wird man bei der praktischen Durchführung auf einem beweglichen Blatt im Hauptschema vornehmen, um die Matrix $\mathfrak{N}$ nicht ein zweites Mal hinschreiben zu müssen.

Es kann nun vorkommen, daß bei der Berechnung der i-ten Spalte von $\mathfrak{H}$ das Nebendiagonalelement $h_{i+1,i}$ gleich Null wird. Dann prüft man nach, ob sich unter der Annahme $h_{i+1,i} = 0$ die weiteren Bedingungsgleichungen, die zur i-ten Spalte von [5] führen, auch wirklich erfüllen lassen:

1. Ist dies der Fall, so wählt man als $i + 1$te Spalte von [3] den Einheitsvektor $\mathfrak{e}_{i+1}$ und fährt wie üblich fort. Die Hessenbergmatrix $\mathfrak{H}$ zerfällt dann an dieser Stelle, was für die weitere Rechnung von Vorteil ist.
2. Ist dies nicht möglich, so hat man in [3] zunächst die $i + 1$te Spalte mit der $i + 2$ten (bzw. $i + 3$ten, $i + 4$ten...) zu vertauschen, wonach sich das Element $h_{i+1,i} \neq 0$ wie im Regelfall bestimmen läßt. In der Matrix $\mathfrak{R}$ sind dann die gleichen Spalten zu vertauschen wie in [3].

Es sind dies dieselben Ausnahmefälle, die auch beim gewöhnlichen Hessenbergschen Verfahren auftreten [2], das für $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ ja mit dem hier beschriebenen Verfahren II völlig übereinstimmt.

Falls nun $\mathfrak{B}$ singulär vom Range $r < n$ ist, hat das Polynom $\varphi(k)$ den Grad $\varrho \ll r$. Die untere Dreiecksmatrix $\tilde{\mathfrak{B}}$ weist jetzt nach der Vorbereitung genau $n - r$ Nullen in der Hauptdiagonale, also $n - r$ Fehlspalten auf. Diese Fehlspalten werden nun nach links geschafft und die $n - r$ oberen Zeilen zu Null gemacht; schließlich entfernt man alle in den Fehlspalten etwa noch von Null verschiedenen Elemente, indem man von rechts nach links passende Vielfache der r rechten Regelspalten addiert. So entsteht die neue Ausgangsform $\hat{\mathfrak{B}}$, die außer lauter Nullen nur eine untere Dreiecksmatrix $\hat{\mathfrak{L}}$ von der Ordnung r unten rechts in $\hat{\mathfrak{B}}$ enthält.

$\tilde{\mathfrak{A}}$ ist bei diesen elementaren Umformungen in $\hat{\mathfrak{A}}$ übergegangen. Wir betrachten jetzt die $n - r$-reihige Teilmatrix $\hat{\mathfrak{A}}_{n-r}$ oben links in $\hat{\mathfrak{A}}$ mit der Hauptabschnittsdeterminante H_{n-r}:

1. Ist $H_{n-r} \neq 0$, so läßt sich $\hat{\mathfrak{A}}_{n-r}$ in die $n-r$-reihige Einheitsmatrix überführen durch Kombination der oberen $n - r$ Zeilen, wodurch sich in $\hat{\mathfrak{B}}$ nichts ändert. Darauf entfernt man in $\hat{\mathfrak{A}}$ alle Elemente in den ersten $n - r$ Spalten, soweit sie unterhalb der $n - r$-reihigen Einheitsmatrix liegen Damit sind die endgültigen Formen $\hat{\hat{\mathfrak{A}}}$ und $\hat{\hat{\mathfrak{B}}}$ erreicht, z. B. für $n = 7$ und $r = 4$:

$$\hat{\hat{\mathfrak{A}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \end{bmatrix}; \quad \hat{\hat{\mathfrak{B}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & 1 \end{bmatrix}$$

In der Matrix $\hat{\hat{\mathfrak{A}}} - k\,\hat{\hat{\mathfrak{B}}}$ läßt sich jetzt die $n - r$-reihige Einheitsmatrix oben links abspalten und damit das Problem auf eines der Ordnung r zurückführen, das man wie üblich behandelt. Der Grad des charakteristischen Polynoms $\varphi(k)$ ist $\varrho = r$.

2. Es ist $H_{n-r} = 0$, $\widehat{\mathfrak{A}}_{n-r}$ hat den Rang $s < n - r$. Dann läßt sich aus $\widehat{\mathfrak{A}}_{n-r}$, ohne daß $\widehat{\mathfrak{B}}$ dadurch geändert wird, nach 2.3 die Rangeinheitsmatrix $\widehat{\mathfrak{E}}_{s;\, n-r-s}$ herstellen; die ersten s-Spalten von $\widehat{\mathfrak{A}}$ kann man dann genau wie unter 1. zu Null machen bis auf die Einsen in der Hauptdiagonale. In den $n - r - s$ Fehlspalten rechts davon sind die oberen $n - r$ Elemente sämtlich gleich Null; die übrigen aber kann man durch Zeilenaddition von oben nach unten und Spaltenaddition von rechts nach links (nicht umgekehrt, weil sonst die Form von $\widehat{\mathfrak{B}}$ zerstört würde!) soweit vereinfachen, daß jede Fehlspalte höchstens ein von Null verschiedenes Element enthält. Stehen nun zwei oder mehr dieser Restelenemte in der gleichen Zeile von $\widehat{\mathfrak{B}}$, so ist das Polynom $\varphi(k)$ identisch Null, da dann zwei oder mehr Spalten der Matrix $\widehat{\mathfrak{A}} - k\widehat{\mathfrak{B}}$ einander proportional sind. Sonst aber streicht man in der Matrix $\widehat{\mathfrak{A}} - k\widehat{\mathfrak{B}}$ die $n - r - s$ Fehlspalten und jene $n - r - s$ Zeilen, welche die Restelemente enthalten, trennt die s-reihige Einheitsmatrix links oben ab und hat damit das Problem auf eines der Ordnung $n - s - (n - r - s) = r$ zurückgeführt, wobei $\widehat{\mathfrak{B}}$ wieder so umzuordnen ist, daß unten rechts eine untere Dreiecksmatrix erscheint. Auf dieses neue Problem wendet man die gleichen Überlegungen ein zweites Mal an und so fort, bis endlich eine untere Dreiecksmatrix in $\widehat{\mathfrak{B}}$ stehengeblieben ist, deren Ordnung mit dem Grad des Polynoms $\varphi(k)$ übereinstimmt und mit der man dann in das Hauptschema eingehen kann.

Ist die inhomogene Aufgabe (25) vorgelegt, so geht bei der Vorbereitung von $\mathfrak{B}$ zunächst $\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{L}_1\, \mathfrak{f}$ über. Dann folgt aus (28) für $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B} = \widetilde{\mathfrak{B}}$: $\mathfrak{L} = (\widetilde{\mathfrak{B}}\, \mathfrak{R})^{-1}$; also wird nach der Gesamttransformation die neue rechte Seite $\mathfrak{g}$ von (25): $\mathfrak{g} = \mathfrak{L}\, \mathfrak{L}_1\, \mathfrak{f} = (\widetilde{\mathfrak{B}}\, \mathfrak{R})^{-1}\, \mathfrak{L}_1\, \mathfrak{f}$. $\widetilde{\mathfrak{B}}\, \mathfrak{R}$ aber ist die Matrix [5] im Hauptschema, an der man nur $\mathfrak{L}_1\, \mathfrak{f}$ vorbeizuziehen braucht, um $\mathfrak{g}$ zu erhalten.

3.3 Probleme höheren Grades in k

Aufgaben der Art

$$(k^p\, \mathfrak{A}_p + k^{p-1}\, \mathfrak{A}_{p-1} + \ldots + k\, \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_0)\, \mathfrak{x} = 0 \tag{30}$$

und mehrparametrige Probleme

$$(k\, \mathfrak{A} + \lambda\, \mathfrak{B} + \mathfrak{C})\, \mathfrak{x} = 0 \text{ und ähnlich} \tag{31}$$

lassen sich im allgemeinen mit konstanten Transformationsmatrizen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$ überhaupt nicht auf rekursiv auflösbare Determinanten bringen.

4. Die Elemente der Transformationsmatrizen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{R}$ sind Funktionen des Parameters k

4.1 Das spezielle Problem $\mathfrak{A}\, \mathfrak{x} = k\, \mathfrak{x}$

Bodewig [1] führt hier die Methode von Weber [5] an, die nach seinen Angaben zur Aufstellung von $\varphi(k)$ rund $7\, n^3/6$ und für die Eigenvektoren rund n^3 Multiplikationen erfordert. Das in 4.2 entwickelte Verfahren III läßt sich für $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ spezialisieren, worauf wir noch zurückkommen werden.

4.2 Das allgemeine Problem $\mathfrak{A}\, \mathfrak{x} = k\, \mathfrak{B}\, \mathfrak{x}$

Wir transformieren nun nicht mehr $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ je für sich, sondern die Polynommatrix $\mathfrak{P}(k) = -k\, \mathfrak{B} + \mathfrak{A}$ insgesamt, wobei wir elementare Umformungen an den Zeilen allein vornehmen, was zur Folge hat, daß $|\mathfrak{L}|$ stets konstant und von Null verschieden ist und $\mathfrak{R} = \mathfrak{E}$ wird, eine Rücktransformation sich somit erübrigt. Da die Linksmatrix $\mathfrak{L}$ selbst ohne Interesse ist, werden wir sie an keiner Stelle ausdrücklich hinschreiben, auch bei inhomogenen Problemen nicht.

Vorweg ein paar neue Bezeichnungen: die Spalten einer beliebigen Polynommatrix, also einer Matrix, deren Elemente keine festen Zahlen, sondern Polynome in k sind, heißen jetzt „Streifen", und zwar Streifen der „Breite" $t + 1$, wenn k^t die höchste vorkommende Potenz von k innerhalb des Streifens ist. Die Breite ist somit im allgemeinen gleich der Maximalzahl von auftretenden Summanden in irgendeinem Polynom des Streifens, kann aber auch größer sein. Die Summe aller Breiten heißt die „Gesamtbreite" g der Polynommatrix. Die Polynome selbst schreiben wir stets nach fallenden Potenzen von links nach rechts geordnet, niemals umgekehrt. Zum Beispiel sei

$$\mathfrak{P}(k) = \begin{bmatrix} 3k^2 + 7k - 1\,; & k^3\,; & -1\,; & 3k \\ 6k\,; & 3k^2 + k\,; & 0\,; & k \\ 2k^2 + 4\,; & 0\,; & k + 7\,; & k \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} *** & **** & ** & ** \\ *** & **** & ** & ** \\ *** & **** & ** & ** \end{bmatrix} \tag{32}$$

Diese Polynommatrix von vier Streifen und drei Zeilen hat die Breiten 3, 4, 2 und 2; die Gesamtbreite g ist somit gleich 11. Rechts neben $\mathfrak{P}(k)$ ist die symbolische Darstellung gegeben, die augenfällig die Breite der Streifen kennzeichnet.

Lassen wir nun alle Potenzen von k fort und ebenso alle Pluszeichen zwischen den Summanden der einzelnen Polynome, so entsteht die der Polynommatrix $\mathfrak{P}(k)$ zugeordnete „Koeffizientenmatrix" $\mathfrak{P}$ mit konstanten Elementen, die wir deshalb ohne Argumentenklammer schreiben zum Unterschied von $\mathfrak{P}(k)$. $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}(k)$ haben die gleiche Anzahl Zeilen, aber $\mathfrak{P}$ hat genau g Spalten. Die zu (32) gehörige Koeffizientenmatrix ist also:

$$\mathfrak{P} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{33}$$

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir insbesondere die Polynommatrix $\mathfrak{P}(k) = -k\mathfrak{B} + \mathfrak{A}$ n-ter Ordnung mit n-Zeilen und n-Streifen der Breite zwei, deren zugeordnete Koeffizientenmatrix somit ebenfalls n Zeilen, aber $2\text{-}n$ Spalten besitzt. Die ersten n dieser Spalten fassen wir jetzt zur „Hauptmatrix" $\mathfrak{P}_H$ zusammen, die übrigen n bilden die „Restmatrix" $\mathfrak{P}_R$. Nun werde $\mathfrak{P}$ von links mit der Kehrmatrix $\mathfrak{P}_H^{-1}$ multipliziert (falls vorhanden, was wir zunächst immer voraussetzen wollen), dann wird aus $\mathfrak{P}$:

$$\mathfrak{P}_H^{-1} \cdot \mathfrak{P} = (\mathfrak{E}, \mathfrak{P}_H^{-1} \cdot \mathfrak{P}_R) \tag{34}$$

also zum Beispiel für $n = 6$:

$$\mathfrak{P}_H^{-1}\mathfrak{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix} \tag{35}$$

Nun gehen wir wieder zur Polynommatrix zurück, indem wir die 1., 3., 5., ... $2n-1$. Spalte von $\mathfrak{P}_H^{-1}\mathfrak{P}$ mit k multiplizieren und je zwei Spalten zu einem Streifen der Breite 2 additiv zusammenfassen, dann wird z. B. aus (35):

$$\mathfrak{P}_H^{-1}\mathfrak{P}(k)=\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & ** & ** & ** \\ 1 & 0 & 0 & ** & ** & ** \\ 0 & k & 0 & ** & ** & ** \\ 0 & 1 & 0 & ** & ** & ** \\ 0 & 0 & k & ** & ** & ** \\ 0 & 0 & 1 & ** & ** & ** \end{bmatrix} \tag{36}$$

Jetzt addieren wir die mit $-k$ multiplizierte 2., 4., ... n-te Zeile zur 1., 3., ... (falls n ungerade, bleibt die letzte einfach stehen), dann wird aus (36) zunächst (37), oder, wenn wir die 2., 4., .. Spalte voransetzen und dann erst die 1., 3., ... folgen lassen, (38):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & *** & *** & *** \\ 1 & 0 & 0 & ** & ** & ** \\ 0 & 0 & 0 & *** & *** & *** \\ 0 & 1 & 0 & ** & ** & ** \\ 0 & 0 & 0 & *** & *** & *** \\ 0 & 0 & 1 & ** & ** & ** \end{bmatrix}(37); \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & ** & ** & ** \\ 0 & 1 & 0 & ** & ** & ** \\ 0 & 0 & 1 & ** & ** & ** \\ \hline 0 & 0 & 0 & *** & *** & *** \\ 0 & 0 & 0 & *** & *** & *** \\ 0 & 0 & 0 & *** & *** & *** \end{array}\right](38)$$

Die Matrix (38) weist vier Felder auf: oben links steht die Einheitsmatrix der Ordnung $n/2$ (bzw. $[n+1]/2$ für ungerade n), darunter ist alles Null; die Elemente oben rechts sind linear in k (**). Die Polynommatrix unten rechts nennen wir die „Kernmatrix" $\mathfrak{K}_1(k)$, ihre Determinante ist offensichtlich gleich dem charakteristischen Polynom $\varphi(k)$. Für gerade n ist $\mathfrak{K}_1(k)$ von der Ordnung $n/2$ und enthält im allgemeinen lauter quadratische Polynome (***); für ungerade n dagegen ist ihre Ordnung $(n+1)/2$, dafür sind erste Zeile und erster Streifen auch nur linear in k. Damit ist der erste Schritt beendet, und wir haben es im folgenden nur noch mit der Kernmatrix $\mathfrak{K}_1(k)$ allein zu tun. Zweiter Schritt: Die zu $\mathfrak{K}_1(k)$ gehörige Koeffizientenmatrix $\mathfrak{K}_1$ spalten wir wiederum auf in die quadratische Hauptmatrix $\mathfrak{K}_{1\mathrm{H}}$ und die Restmatrix $\mathfrak{K}_{1\mathrm{R}}$ und multiplizieren von links mit $\mathfrak{K}_{1\mathrm{H}}^{-1}$:

$$\mathfrak{K}_{1\mathrm{H}}^{-1}\cdot\mathfrak{K}_1=(\mathfrak{E},\ \mathfrak{K}_{1\mathrm{H}}^{-1}\cdot\mathfrak{K}_{1\mathrm{R}}) \tag{39}$$

Aus der Kernmatrix von (38) wird z. B. (40). Die 1., 4., 7., ... Spalte von (39) ist nun mit k^2, die 2., 5., ... Spalte mit k zu multiplizieren; außerdem werden je drei Spalten zu einem Streifen zusammengefaßt. So entsteht aus (40) die zugehörige Polynommatrix (41) mit drei Zeilen und drei Streifen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}(40); \quad \begin{bmatrix} k^2 & *** & *** \\ k & *** & *** \\ 1 & *** & *** \end{bmatrix}(41); \quad \begin{bmatrix} 0 & **** & **** \\ 0 & **** & **** \\ 1 & *** & *** \end{bmatrix}(42)$$

Jetzt wird zuerst die mit $-k$ multiplizierte zweite Zeile zur ersten, dann die mit $-k$ multiplizierte dritte Zeile zur zweiten addiert, dann geht (41) über in (42). Macht man hier noch die dritte Zeile zur ersten, so ist aus der Gesamtmatrix (38) geworden:

$$\mathfrak{L}(k)\cdot\mathfrak{P}(k)=\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & ** & ** & ** \\ 0 & 1 & 0 & ** & ** & ** \\ 0 & 0 & 1 & ** & ** & ** \\ 0 & 0 & 0 & 1 & *** & **** \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & **** & **** \\ 0 & 0 & 0 & 0 & **** & **** \end{array}\right] \qquad (43)$$

Die neue Kernmatrix $\mathfrak{K}_2(k)$ unten rechts in (43) ist nur noch von zweiter Ordnung; damit ist der zweite Rechenschritt und für den als Beispiel gewählten Fall $n = 6$ auch die Gesamttransformation beendet. Ganz allgemein gilt nun, wenn wir die gegebene Polynommatrix $\mathfrak{P}(k) = \mathfrak{K}_0(k)$ setzen.:

Verfahren III

$i + 1$ ter Rechenschritt:

a) Eine Kernmatrix $\mathfrak{K}_i(k)$ ist vom $i$ten Rechenschritt übriggeblieben.

b) Es wird die zu $\mathfrak{K}_i(k)$ gehörige Koeffizientenmatrix $\mathfrak{K}_i$ aufgestellt.

c) $\mathfrak{K}_i$ habe z-Zeilen; dann werden die ersten z Spalten von $\mathfrak{K}_i$ zur Hauptmatrix $\mathfrak{K}_{iH}$ zusammengefaßt, die nichtsingulär sei. Übrig bleibt die Restmatrix $\mathfrak{K}_{iR}$.

d) Man bildet die neue Matrix $\mathfrak{K}_{iH}^{-1}\mathfrak{K}_i = (\mathfrak{E}, \mathfrak{K}_{iH}^{-1}\mathfrak{K}_{iR})$.

e) Diese rechteckige Matrix mit konstanten Elementen wird wieder zur quadratischen Polynommatrix zusammengefaßt.

f) Gewisse geeignete Zeilen werden nun mit $-k$ multipliziert und zur unmittelbar darüberstehenden Zeile addiert. Dadurch lassen sich eine Anzahl Streifen soweit vereinfachen, daß ihre Elemente sämtlich verschwinden bis auf ein einziges, konstantes, das den Wert eins hat.

g) Diejenigen Zeilen, die diese Einsen enthalten, rückt man als erste nach oben.

h) Rechts unten erscheint dann die neue Kernmatrix $\mathfrak{K}_{i+1}(k)$, deren Ordnung im allgemeinen niedriger ist als die von $\mathfrak{K}_i(k)$.

Das Verfahren wird solange fortgeführt, bis die Kernmatrix die Ordnung zwei erreicht hat. Dann wird deren Determinante über Kreuz ausmultipliziert und liefert das gesuchte Polynom $\varphi(k)$. Soll nun der zu irgendeinem Eigenwert k_i gehörige Eigenvektor $\mathfrak{y}_i$ bestimmt werden, so streicht man eine der beiden letzten Zeilen der transformierten Gesamtmatrix, setzt in die übrigen $n - 1$ Zeilen den Wert k_i ein, wählt die letzte Komponente x_{ni} des gesuchten Eigenvektors $\mathfrak{x}_i$ gleich eins (falls sie nicht Null wird, was die Rechnung sogleich anzeigt) und errechnet die übrigen Komponenten, indem man an der um eine Zeile verminderten Gesamtmatrix den Nullvektor vorbeizieht.

Beispiel 3: Eigenwerte und -vektoren der Aufgabe $(-k\mathfrak{B} + \mathfrak{A})\mathfrak{x} = \mathfrak{P}(k)\mathfrak{x} = 0$ sind aufzusuchen. Es sei

$$\mathfrak{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\mathfrak{P}=\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right]=(\mathfrak{P}_\mathrm{H},\mathfrak{P}_\mathrm{R})$$

Um $\mathfrak{P}_\mathrm{H}^{-1}\,\mathfrak{P}_\mathrm{R}$ zu ermitteln, wird $\mathfrak{P}_\mathrm{H}$ wie üblich zerlegt in $\mathfrak{L}_1^{-1}$ und $\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{P}_\mathrm{H}$ und $\mathfrak{P}_\mathrm{R}$ an diesen beiden Dreiecksmatrizen vorbeigezogen. Man findet nach einfacher Rechnung:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathfrak{P}_\mathrm{H}\,\mathfrak{P}_\mathrm{R}^{-1} & \\ \mathfrak{L}_1\,\mathfrak{P}_\mathrm{H} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & -2\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathfrak{L}_1\,\mathfrak{P}_\mathrm{R}\\ \mathfrak{L}_1^{-1} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & -2\\ 3 & 1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathfrak{P}_\mathrm{R} \end{array}$$

Also ist:

$$\mathfrak{P}_\mathrm{H}^{-1}\,\mathfrak{P}=\left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]=(\mathfrak{E},\mathfrak{P}_\mathrm{H}^{-1}\,\mathfrak{P}_\mathrm{R}) \qquad (44)$$

und (44) zur Polynommatrix zusammengefaßt gibt (45). Dann wird die mit $-k$ multiplizierte 2. (4.) Zeile zur 1. (3.) addiert: (46); schließlich stellt man 2. und 4. Zeile voran und erhält damit (47):

$$\begin{bmatrix} k & 0 & k & k\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & k & 2k & k\\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} (45)\;;\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & k & 2k\\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} (46)\;;$$

$$\mathfrak{L}(k)\,\mathfrak{P}(k)=\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & k & 2k \end{array}\right] \quad (47)$$

Die Kernmatrix $\mathfrak{K}_1(k)$ zweiter Ordnung rechts unten in (47) hat eine identisch verschwindende Determinante, also ist $\varphi(k)\equiv 0$, was man auch schon in (46) erkennen konnte. Jede beliebige Zahl ist somit Eigenwert. Aus (47) findet man leicht den Eigenvektor $\mathfrak{x}_1$, für den $\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}_1=0$ und $\mathfrak{B}\,\mathfrak{x}_1=0$ ist. Setzt man insbesondere den Wert $k=0$ in (47) ein, so hat $\mathfrak{L}(0)\,\mathfrak{P}(0)$ nur noch den Rang zwei, und es gibt demnach zwei verschiedene linear unabhängige Eigenvektoren $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{x}_3$, womit jeder Vektor der Form $a\,\mathfrak{x}_2+b\,\mathfrak{x}_3$ (a und b beliebig) ebenfalls Eigenvektor zu $k=0$ ist. Für $a=1$ und $b=2$ ergibt sich dann gerade $\mathfrak{x}_1$.

$$\mathfrak{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

Bei höheren Graden n sind zur Ordnungserniedrigung der Kernmatrix $\mathfrak{K}_i(k)$ oft mehrere Rechenschritte erforderlich, nämlich immer dann, wenn die Ordnung der zu transformierenden Kernmatrix kleiner ist als die Breite des ersten Streifens.

Zum Beispiel wird für $n = 12$ nach dem dritten Schritt $\mathfrak{K}_3(k)$ von der Form (48): Die Ordnung ist drei, die Elemente aber sind Polynome vierten Grades, die Streifenbreite ist somit fünf, die Gesamtbreite $g = 15$.

Aus (48) wird dann zunächst (49), und wenn man die mit $-k$ multiplizierte zweite Zeile zur ersten addiert, dann die mit $-k$ multiplizierte dritte zur zweiten, schließlich (50):

$$\mathfrak{K}_3(k) = \begin{bmatrix} ***** & ***** & ***** \\ ***** & ***** & ***** \\ ***** & ***** & ***** \end{bmatrix} \tag{48}$$

$$\begin{bmatrix} k^4 \quad + a_1 k + b_1 & ***** & ***** \\ k^3 \quad + a_2 k + b_2 & ***** & ***** \\ k^2 \quad + a_3 k + b_3 & ***** & ***** \end{bmatrix} \tag{49}$$

$$\begin{bmatrix} -a_2 k^2 + (a_1 - b_2)\, k + b_1 & ****** & ****** \\ -a_3 k^2 + (a_2 - b_3)\, k + b_2 & ****** & ****** \\ k^2 + \qquad a_3 k + b_3 & ***** & ***** \end{bmatrix} \tag{50}$$

Die Matrix (50) aber läßt sich beim nächsten Schritt um eine Ordnung erniedrigen. In ähnlichen Fällen verfährt man entsprechend.

Wir nehmen nun an, daß bei irgendeinem Schritt die quadratische Hauptmatrix $\mathfrak{K}_{iH}$ singulär wird, was natürlich auch dann eintreten kann, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beide nichtsingulär waren, während andererseits bei singulärem $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sämtliche Hauptmatrizen regulär bleiben können, wie das gerechnete Beispiel 3 zeigt. Zwar läßt sich $\mathfrak{K}_{iH}^{-1}$ jetzt nicht bilden, wohl aber nach 2.3 $\mathfrak{K}_{iH}$ auf eine obere Dreiecksmatrix bringen, deren Regelspalten mit den entsprechenden Spalten der Einheitsmatrix übereinstimmen, deren Fehlspalten jedoch in der Hauptdiagonale Nullen und oberhalb davon beliebige von Null verschiedene Elemente enthalten. Gehen wir nun zur zugeordneten Polynommatrix zurück und betrachten den ersten Streifen links, der eine oder mehrere Fehlspalten enthält, dann sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Die letzte Spalte des Streifens ist Regelspalte. Dann sind gewisse Zeilen nicht nur mit $-k$, sondern allgemeiner mit Ausdrücken der Form $-a_i k$, $-a_j k^2$, $-a_k k^3$ usw. zu multiplizieren und nicht nur zur unmittelbar darüber, sondern auch zu höher stehenden Zeilen zu addieren. Zum Schluß bleibt in der letzen Spalte des Streifens die 1 stehen, und man verfährt weiter wie sonst.

b) Die letzte Spalte des Streifens ist Fehlspalte. Die am weitesten rechts stehende Regelspalte $\mathfrak{s}_q$ des Streifens enthalte das Hauptdiagonalelement k^q. Dann verläuft bis zu dieser Spalte alles wie unter a): die Spalten des Streifens links von $\mathfrak{s}_q$ sind sämtlich Null, $\mathfrak{s}_q$ selbst enthält lediglich das Hauptdiagonalelement k^q. Rechts davon ist nun die Hauptdiagonale mit Nullen besetzt, aber oberhalb dieser können noch von Null verschiedene Elemente stehen. Einige dieser Elemente stehen in solchen Zeilen, die bereits blockiert sind, weil sie das Hauptdiagonalelement 1 aus anderen, weiter links stehenden Streifen enthalten; diese Elemente lassen wir stehen; am Ende des nächsten Rechenschrittes sind dann oben links in der Einheitsmatrix oberhalb der Hauptdiagonale einige Nullen durch Polynome in k ersetzt, was aber nicht stört. Die übrigen, nicht blockierten, noch freibeweglichen Zeilen aber können solange kombiniert werden, bis einer der folgenden drei Fälle eingetreten ist:

b_1) In einer einzigen der freibeweglichen Zeilen bleibt eine 1 stehen. Diese 1 erscheint dann später in der Hauptdiagonale der oben links stehenden Einheitsmatrix. Es liegt der Regelfall vor genau wie unter a).

b_2) In einer der freibeweglichen Zeilen bleibt ein Polynom $\psi(k)$ vom Grade t stehen. Dieses vertritt dann eine 1 in der Einheitsmatrix oben links, ist somit Teiler des gesuchten charakteristischen Polynoms $\varphi(k)$; die folgenden Kernmatrizen können also höchstens noch $n - t$ Eigenwerte enthalten.

b_3) In sämtlichen frei beweglichen Zeilen des Streifens stehen Nullen. Das tritt genau dann ein, wenn der Streifen keine einzige Regelspalte aufweist und etwa vorhandene von Null verschiedene Elemente höchstens in den blockierten Zeilen auftreten, nicht außerhalb dieser. Dann ist $\varphi(k) \equiv 0$. Falls auch noch der Eigenvektor interessiert, fährt man fort wie gewöhnlich.

Alles über den ersten Streifen links mit Fehlspalte Gesagte gilt nun ebenso für sämtliche anderen etwa vorhandenen Fehlstreifen rechts davon, so daß das Verfahren in jedem denkbaren Falle sicher zum Ziele führt. Die Singularität der Hauptmatrizen und die dadurch bedingten Ausnahmeerscheinungen hängen eng zusammen mit den Elementarteilern der Polynommatrix $\mathfrak{P}(k)$; da aber dieser Zusammenhang nur theoretisches Interesse besitzt, gehen wir nicht darauf ein.

Bei inhomogenen Aufgaben der Art (25) faßt man den Vektor $\mathfrak{f}$ als zusätzliche rechte Spalte der Matrix $\mathfrak{P}(k)$ auf und führt die Transformation wie gewöhnlich durch. $\mathfrak{f}$ wird dann in $\mathfrak{L}(k)\,\mathfrak{f}$ mittransformiert (siehe Beispiel 5).

Für das spezielle Problem $\mathfrak{P}(k) = -k\,\mathfrak{E} + \mathfrak{A}$ ordnet man vor der Rechnung die Streifen von $\mathfrak{P}(k)$ in die Reihenfolge 1, 3, 5 ..., dann erst 2, 4, 6 ... um, wodurch der erste Rechenschritt nur $n^3/2$ Multiplikationen erfordert gegenüber $(4\,n^3 - n)/3$ beim allgemeinen Problem. Vom zweiten Schritt an verläuft dann alles wie sonst. Doch ist das Verfahren III für spezielle Probleme den in 3.1 angeführten Verfahren unterlegen!

Beispiel 4: Gesucht sind Eigenwerte und -vektoren der Aufgabe $\mathfrak{A}\,\mathfrak{x} = k\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{x}$ mit

$$-\mathfrak{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & -3 & -2 \\ 6 & 0 & 5 & -8 & -7 & -3 & 3 \end{bmatrix} \text{ und } \mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 8 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathfrak{L}_2\mathfrak{L}_1\mathfrak{P}_H\widehat{\mathfrak{E}}\ [5]\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\tfrac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 7/2 & \tfrac{1}{2} & -5/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -8 \end{bmatrix}\ [8]\ \mathfrak{L}_2\mathfrak{L}_1\mathfrak{P}_R$$

$$\mathfrak{L}_2^{-1}\ [2]\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathfrak{L}_1\mathfrak{P}_H\ [4]\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Bigg\| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -8 \end{bmatrix}\ [7]\ \mathfrak{L}_1\mathfrak{P}_R$$

$$\mathfrak{L}_1^{-1}\ [1]\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathfrak{P}_H\ [3]\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 5 & 5 & -8 \end{bmatrix} \Bigg\| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 8 & -7 & 5 & -3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}\ [6]\ \mathfrak{P}_R$$

Die zu $\mathfrak{P}(k) = k\,(-\mathfrak{B}) + \mathfrak{A}$ gehörige Koeffizientenmatrix $\mathfrak{P}$ hat 7 Zeilen und 14 Spalten, deren ersten sieben zur Hauptmatrix $\mathfrak{P}_H$ zusammengefaßt werden. Bei der Zerlegung von $\mathfrak{P}_H$ stellt sich heraus, daß $\mathfrak{L}_1\mathfrak{P}_H$ vier Fehlspalten aufweist, nämlich die 3., 4., 6. und 7., $\mathfrak{P}_H$ somit nur den Rang drei besitzt. $\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{P}_H$ wird mittels einer zweiten Linksmatrix $\mathfrak{L}_2$ nach 2.3 auf die Form $\mathfrak{L}_2\,\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{P}_H = \widehat{\mathfrak{E}}$ gebracht und dann die Restmatrix $\mathfrak{P}_R$ an $\mathfrak{L}_1^{-1}$ und $\mathfrak{L}_2^{-1}$ vorbeigezogen, wie auf Seite 190 durchgeführt.

Die senkrechten Trennstriche deuten an, daß [2] (nicht [4]) mit [8] multipliziert [7] ergibt und ebenso [1] (nicht [3]) mit [7] multipliziert [6]. Aus $\mathfrak{P}$ ist nun $\mathfrak{L}_2\,\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{P} = (\widehat{\mathfrak{E}},\ \mathfrak{L}_2\,\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{P}_R)$ geworden; gehen wir jetzt zur zugehörigen Polynommatrix $\mathfrak{L}_2\,\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{P}(k)$ zurück, indem wir die 1., 3., 5. ... 13. Spalte mit k multiplizieren und je zwei Spalten zu einem Streifen zusammenfassen:

$$\begin{bmatrix} k & -k/2 & 0 & 0 & k & 3{,}5 & 0{,}5\,k-2{,}5 \\ 1 & k & 0 & 1 & 0 & -4 & k+4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & k & 0 & -k & k-1 & k \\ 0 & 0 & 0 & k & k & k+2 & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \end{bmatrix} \tag{51}$$

Der erste Streifen ist der einzige ohne Fehlspalte; dort haben wir also die mit $-k$ multiplizierte zweite Zeile zur ersten zu addieren. Im zweiten Streifen lassen wir das zweite Element k stehen, da die zweite Zeile durch die 1 des ersten Streifens bereits blockiert ist. Wir entfernen lediglich das erste Element $-k^2 - k/2$ (ursprünglich $-k/2$) durch Addition der mit $k^2 + k/2$ multiplizierten dritten Zeile zur ersten. Um das Element k im dritten Streifen zu beseitigen, wird die mit $-k$ multiplizierte vierte Zeile zur fünften addiert. Die 2., 3. und 4. Zeile liegen jetzt fest; Elemente dieser Zeilen, soweit sie im vierten Streifen stehen, stören nicht. Die beiden übrigen aber, nämlich $k^2 - k/2$ in der 1. und $-k$ (ursprünglich 0) in der 5. Zeile entfernen wir noch, indem wie die 6. Zeile zur 5. und die mit $-k + 1/2$ multiplizierte 6. Zeile zur 1. addieren. Nehmen wir jetzt die 2., 3., 4. und 6. Zeile vorweg, so wird aus (51):

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & k & 0 & 1 & 0 & -4 & k+4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & k & k & k+2 & k-2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2\,k & k^2 + 7\,k/2 + 9/2 & -5\,k^2 - 5\,k/2 - 7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k & 1 & 3\,k - 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \end{array}\right] \tag{52}$$

Oben links steht nicht wie im Regelfall die Einheitsmatrix, sondern eine obere Dreiecksmatrix $\mathfrak{D}(k)$; also ist $\varphi(k) = |\mathfrak{D}(k)| \cdot |\mathfrak{K}_1(k)| = k \cdot |\mathfrak{K}_1(k)|$; $k = 0$ ist somit Eigenwert. In der Kernmatrix $\mathfrak{K}_1(k)$ dritter Ordnung unten rechts in (52) addieren wir die mit 2 multiplizierte zweite Zeile zur ersten und erhalten nach geeigneter Zeilenvertauschung endgültig aus (52):

$$\left[\begin{array}{ccccc|cc}
1 & k & 0 & 1 & 0 & -4 & k+4 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & -3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & k & k & k+2 & k-2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -k & 1 & 3k-2 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k^2+7k/2+13/2 & -5k^2+7k/2-15/2
\end{array}\right] \tag{53}$$

Die Determinante der Kernmatrix $\mathfrak{K}_2(k)$ rechts unten in (53) ist $|\mathfrak{K}_2(k)| = -2k^2 + 35k + 37$, und aus $\varphi(k) = k \cdot (-k) \cdot (-2k^2 + 35k + 37) = 0$ entnimmt man die vier Eigenwerte $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = -1$ und $k_4 = 37/2$. Streicht man in (53) die letzte Zeile, so lassen sich die drei (nicht vier) zugehörigen Eigenvektoren leicht berechnen; z. B. wird $\mathfrak{x}'_3 = (7 \;\; -6 \;\; -8 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 4 \;\; 1)$, und man überzeugt sich, daß wirklich $\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}_3 = -\mathfrak{B}\,\mathfrak{x}_3$ ist.

4.3 Probleme höheren Grades in k

lassen sich ebenfalls nach dem Verfahren III lösen; denn die während der Rechnung auftretenden Kernmatrizen $\mathfrak{K}_i(k)$ sind ja gerade von der Gestalt (30)!

Beispiel 4: Es sind Eigenwerte und -vektoren sowie die inhomogene Lösung des Problems $(\mathfrak{A}\,k^2 + \mathfrak{B}\,k + \mathfrak{C})\,\mathfrak{x} = \mathfrak{P}(k)\,\mathfrak{x} = \mathfrak{f}$ aufzusuchen mit

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{C} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{f} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die zu $\mathfrak{P}(k)$ gehörige Koeffizientenmatrix $\mathfrak{P}$ wird zerlegt in Haupt- und Restmatrix. Die Hauptmatrix ist nichtsingulär, also erscheint oben links die Einheitsmatrix. Die Restmatrix wird gemeinsam mit $\mathfrak{f}$ an $\mathfrak{L}_1^{-1}$ und $\mathfrak{L}_2^{-1}$ vorbeigezogen:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -4 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0
\end{array}\right] (\mathfrak{E}, \mathfrak{L}_2\mathfrak{L}_1\mathfrak{P}_R, \mathfrak{L}_2\mathfrak{L}_1\mathfrak{f})$$

$$\mathfrak{L}_2^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|cccccc|c}
1 & 1 & 3 & 1 & -1 & 1 & 1 & -4 & -2 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -4 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right] \mathfrak{L}_1(\mathfrak{P}_H, \mathfrak{P}_R, \mathfrak{f})$$

$$\mathfrak{L}_1^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|cccccc|c}
1 & 1 & 3 & 1 & -1 & 1 & 1 & -4 & -2 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -4 & 1 \\
1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1
\end{array}\right] (\mathfrak{P}_H, \mathfrak{P}_R, \mathfrak{f})$$

Nun geht man zur Polynommatrix zurück, addiert die mit $-k$ multiplizierte zweite (dritte) Zeile zur ersten (zweiten) und stellt die dritte Zeile voran; dann wird:

$$\mathfrak{L}(k)\,\mathfrak{P}(k) = \left[\begin{array}{c|cc}
1 & -k & -k \\
\hline
0 & k+1; & k^3+4k^2+5k+2 \\
0 & k^2+k; & -2k-4
\end{array}\right]; \quad \mathfrak{L}(k)\,\mathfrak{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ -k+1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

Die Kernmatrix ist zweiter Ordnung. Man findet nach leichter Rechnung $\varphi(k) = k^5 + 5k^4 + 9k^3 + 9k^2 + 8k + 4 = 0$ mit den fünf Wurzeln und vier Eigenvektoren:

$k_1 = -1;\ k_2 = -2;\ k_3 = -2;\ k_4 = i;\ k_5 = -i;$

$$\mathfrak{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix};\ \mathfrak{x}_{2,3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix};\ \mathfrak{x}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1-3i \\ 1 \end{bmatrix};\ \mathfrak{x}_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1+3i \\ 1 \end{bmatrix};$$

Ist nun die inhomogene Lösung für irgendeinen Wert k gesucht, der im allgemeinen kein Eigenwert sein darf, so braucht man diesen Wert nur in $\mathfrak{L}(k)\ \mathfrak{P}(k)$ und $\mathfrak{L}(k)\,\mathfrak{f}$ einzusetzen und kann den Vektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{P}^{-1}(k)\,\mathfrak{f}$ rekursiv berechnen.

Da die Aufgabe nur von der dritten Ordnung ist, könnte man die Determinante $|\mathfrak{P}(k)| = \varphi(k)$ auch durch Entwickeln nach Unterdeterminanten (nicht nach der Cramerschen Regel, was zu umständlich wäre!) erhalten. Man zählt aber leicht nach, daß die hier durchgeführte Methode weniger Multiplikationen erfordert und zudem weniger Schreibarbeit macht.

4.4 Mehrparametrige Probleme

nach Art von (31) löst man ebenfalls mit dem Verfahren III in sinngemäßer Abwandlung.

Beispiel 6: Es sei $\mathfrak{P}(k, \lambda)\,\mathfrak{x} = (\mathfrak{A}\,k + \mathfrak{B}\,\lambda + \mathfrak{C})\,\mathfrak{x} = 0$ mit denselben Matrizen wie im Beispiel 5.

Zu $\mathfrak{P}(k, \lambda)$ gehört die gleiche Koeffizientenmatrix wie zu $\mathfrak{P}(k)$ im Beispiel 5, also verläuft auch die Rechnung genau wie dort. Nur ist jetzt bei der Rückkehr zur Polynommatrix zu beachten, daß die erste Spalte des Streifens mit k und die zweite mit λ zu multiplizieren ist, das ergibt (54). Dann wird die mit $-\lambda$ $(-k)$ multiplizierte 3. Zeile zur zweiten (ersten) addiert. Stellt man noch die dritte Zeile voran, so folgt (55):

$$\begin{bmatrix} k & k+\lambda+1 & 2k+\lambda+2 \\ 0 & \lambda & -k-2\lambda-4 \\ 1 & -\lambda & -\lambda \end{bmatrix} \qquad (54);$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & -\lambda \\ 0 & k+k\lambda+\lambda+1 & 2k+k\lambda+\lambda+2 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & -k+\lambda^2-2\lambda-4 \end{bmatrix} \qquad (55)$$

Hier wird nun $\varphi(k, \lambda) = 4\lambda^2(k+1) + \lambda\cdot(k^2+9k+8) + (k^2+5k+4) = 0$ Die Komponenten der Eigenvektoren sind jetzt im allgemeinen Funktionen eines der beiden Parameter.

5. Zusammenfassung

Wir haben gezeigt, wie sich das allgemeine Eigenwertproblem $\mathfrak{A}\,\mathfrak{x} = k\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{x}$ ohne Kenntnis von $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}$ direkt lösen läßt, und drei verschiedene Methoden dazu entwickelt. Die Verfahren I und II gehen für $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ in das Verfahren von Hessenberg über; ihre Anwendbarkeit ist auf nur zwei Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beschränkt; Probleme höheren Grades in k lassen sich nicht damit lösen. Das Verfahren III dagegen läßt sich auf allgemeinere Aufgaben der Art (30) und (31) ausdehnen, wie wir an den Beispielen 5 und 6 gezeigt haben.

Die Tabelle II stellt für einige Ordnungen n die Anzahlen z der erforderlichen Multiplikationen zusammen, wobei zum Vergleich auch das mit 0 bezeichnete Verfahren, nämlich Bilden von $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}$ und anschließende Hessenbergsche Transformation herangezogen ist. Ganz allgemein gilt:

Verfahren	Aufstellung von $\varphi(k)$		Berechnung eines Eigenvektors
0	$\frac{n}{3} \cdot (7n^2 - 3n - 1)$	$\approx \frac{7}{3} n^3$	$n \cdot (n-2)$
I	$\frac{n}{12} \cdot (n^3 + 22n^2 - 13n + 2)$	$\approx \frac{n^4}{12} + \frac{11}{6} n^3$	$n \cdot (n-2)$
II	$\frac{n+1}{2} \cdot (4n^2 - 5n + 2)$	$\approx 2n^3$	$(n-1)^2$
III	formelmäßig nicht angebbar		

In der Tabelle II ist für jede Ordnung n das Verfahren herausgehoben, welches die geringste Anzahl von Multiplikationen erfordert: für kleinere n ist das Verfahren III vorzuziehen, für größere dagegen Verfahren II. Der Gewinn gegenüber dem Verfahren 0 beträgt etwa 15—23%. (Für $n \to \infty$ verhält sich $z_0 : z_{II}$ wie 7/3 : 2 oder wie 7 : 6!) Die Überlegenheit des Verfahrens III über 0 zeigt sich besonders deutlich bei $n = 4$: die Berechnung der Matrizen $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{P}_H^{-1}\mathfrak{P}_R$ erfordert die gleiche Anzahl Multiplikationen, nämlich 84. Während im Verfahren 0 die Transformation von Hessenberg erst durchgeführt werden muß, ist die Transformation des Verfahrens III bereits beendet; man hat lediglich eine zweireihige Determinante mit in k quadratischen Elementen auszumultiplizieren!

Tabelle II

Aufstellen des charakteristischen Polynomes $\varphi(k)$					Berechnen eines Eigenvektors			Ermittlung von $\varphi(k)$ und n Eigenvektoren				
n	0	I	II	III	0; I	II	III	0	I	II	III	III
3	53	47	46	42	3	4	6	62	56	58	60	1
4	132	122	115	102	8	9	11	164	154	151	146	1
5	265	255	231	218	15	16	18	340	330	311	308	2
6	466	466	406	380	24	25	27	610	610	556	542	2
8	1128	1212	981	958	48	49	52	1512	1596	1373	1374	3
10	2230	2560	1936	1970	80	81	87	3030	3360	2746	2840	4

Die letzte Spalte der Tabelle gibt die erforderliche Anzahl von Rechenschritten im Verfahren III an.

6. Literatur

[1] E. Bodewig, Bericht über die Methoden zur numerischen Lösung von algebraischen Eigenwertproblemen. Atti del seminario matematico e fisico dell'universita di Modena. Vol. IV (1949—50) und Vol. V (1950—51).

[2] S. Falk, Ein übersichtliches Schema für die Matrizenmultiplikation. ZaMM Bd. 31 Nr. 4/5, April/Mai 1951.

[3] S. Falk, Die Berechnung der Torsionseigenschwingungszahlen verzweigter Maschinenanlagen. Dissertation an der Technischen Hochschule Braunschweig, 1953.

[4] H. Unger, Über direkte Verfahren bei Matrizeneigenwertproblemen. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Dresden, Heft 3, Jahrgang 1952/53.

[5] R. Weber, Recherches des valeurs et vecteurs propres d'une matrice. Recherches aeronautiques, 1949, n. 10, p. 50—60.

[6] R. Zurmühl, Matrizen. Eine Darstellung für Ingenieure. Springer-Verlag 1950.